N° d'enregistrement
au C.N.R.S.
A.O. 11671

THESE DE DOCTORAT D'ETAT
ES SCIENCES PHYSIQUES

PRESENTEE

A L'UNIVERSITE PARIS VI

par

Joseph LEWI

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ES SCIENCES

CONTRIBUTION A L'ETUDE DYNAMIQUE DES ECOULEMENTS DIPHASIQUES GAZ-LIQUIDE

Soutenue le 21 octobre 1975 , devant la Commission d'Examen

MM.	A. FORTIER	Président
	R. COMOLET P. ALAIS H. MONDIN	Examinateurs
	J.M. DELHAYE P. SMIGIELSKI	Rapporteurs

N° d'enregistrement
au C.N.R.S.
A.O. 11671

THESE DE DOCTORAT D'ETAT
ES SCIENCES PHYSIQUES

PRESENTEE

A L'UNIVERSITE PARIS VI

par

Joseph LEWI

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ES SCIENCES

CONTRIBUTION A L'ETUDE DYNAMIQUE DES ECOULEMENTS DIPHASIQUES GAZ-LIQUIDE

Soutenue le 21 octobre 1975 , devant la Commission d'Examen

MM.	A. FORTIER	Président
	R. COMOLET P. ALAIS H. MONDIN	Examinateurs
	J.M. DELHAYE P. SMIGIELSKI	Rapporteurs

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

A Sylvie

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41548106_0016

AVANT - PROPOS

Je suis tout particulièrement reconnaissant à Monsieur le Professeur FORTIER qui a bien voulu assurer la direction de cette thèse et accepter la présidence du Jury d'Examen. L'intérêt qu'il a porté à ce travail a constitué pour moi une aide précieuse.

J'exprime mes plus vifs remerciements à Messieurs les Professeurs COMOLET et ALAIS qui m'ont fait l'honneur de juger cette étude.

Monsieur MONDIN, Chef du Département de Transfert et de Conversion d'Energie au Commissariat à l'Energie Atomique, a suivi avec intérêt le déroulement de cette étude. Qu'il trouve ici l'expression de ma gratitude.

Monsieur DELHAYE, Ingénieur au Centre d'Etudes Nucléaires de Grenoble, a bien voulu accepter la charge de rapporteur. Les remarques qu'il m'a faites m'ont été profitables et je l'en remercie chaleureusement.

Monsieur SMIGIELSKI, Chef du Département d'Optique à l'Institut Franco-Allemand de Saint-Louis, m'a fait bénéficier de son expérience en holographie. Il a bien voulu accepter la charge de rapporteur. Je lui en suis vivement reconnaissant.

Je remercie particulièrement Monsieur PORTE, Ingénieur au Centre d'Etudes Nucléaires de Saclay, qui a suscité cette thèse et m'a encouragé tout au long de son élaboration.

Ma collaboration avec Messieurs BILLARD et FERTIN, Ingénieurs à l'O.N.E.R.A., a été fructueuse. Je les en remercie vivement.

Je remercie enfin Messieurs ADLER, Attaché de Recherche au C.N.R.S., LECROART et MALPLAT, Ingénieurs au Centre d'Etudes Nucléaires de Saclay, et tout le personnel du Service d'Etudes Energétiques du C.E.N.S. pour l'aide précieuse qu'ils m'ont apportée tout au long de mon étude.

*
* *
*

Les applications des écoulements diphasiques, dans des domaines aussi divers que le génie chimique, le génie nucléaire et la propulsion marine, ont suscité, depuis trente ans environ, un grand nombre d'études, tant théoriques qu'expérimentales. Parallèlement à celles-ci, une métrologie adaptée à ces écoulements est apparue - qui est sans cesse perfectionnée et de plus en plus fiable et précise -.

Nous avons abordé, dans notre travail de thèse, le domaine théorique et la métrologie :

- la première partie est une contribution théorique à l'étude dynamique des écoulements à deux phases - gaz et liquide - dans un canal.

- la deuxième partie nous a permis de déterminer, par des méthodes optiques, les perturbations créées dans un écoulement diphasique, par une sonde à variation d'impédance, mise au point pour la mesure du taux de vide.

TABLE DES MATIERES

NOMENCLATURE

1ère PARTIE : Contribution théorique à l'étude dynamique des écoulements diphasiques gaz-liquide

INTRODUCTION

I. Généralités

II. 1. Extrapolation des études sur la dynamique de la bulle isolée

2. Corrélations

3. Modèles

4. Application des principes de la mécanique des milieux continus

III. But et intérêt de cette contribution

CHAPITRE 1 : Equations générales de conservation

I. Equations locales instantanées d'un écoulement diphasique au sens des distributions

II. Equations phasiques locales instantanées

III. Moyennes temporelles

IV. Tenseur moyen des contraintes

CHAPITRE 2 : Ecoulement turbulent d'une émulsion dans un canal de section constante (problème dynamique)

I. Introduction

II. Hypothèses

III. Définition du glissement local

IV. Equations

V. Etude de la contrainte tangentielle à la paroi

VI. Profils des vitesses moyennes en écoulement turbulent

VII. Frottement

VIII. Variation de la pression en fonction de x_1

IX. Ecoulement dans un canal de section circulaire

X. Etude du taux de vide

XI. Conclusion

2ème PARTIE : Etude expérimentale de l'interaction d'une bulle d'air avec une sonde à variation d'impédance

INTRODUCTION

CHAPITRE 3 : Rappel du fonctionnement de la sonde à variation d'impédance

I. Fonctionnement des sondes et traitement du signal

II. Structure locale de l'émulsion

III. Conclusion

CHAPITRE 4 : Expérience "I.B.S."

I. Installation d'essais

II. Dispositifs mis en oeuvre pour la détection des bulles et la prise de vue

III. Résultats

IV. Conclusion

CHAPITRE 5 : Expérience "HOLOGRAPHIE"

I. Introduction

II. Rappel du principe de l'holographie

III. Installation expérimentale

IV. Montages optiques

V. Résultats obtenus

VI. Conclusion

CHAPITRE 6 : Expérience "V.E.E."

I. Conditions générales de l'expérience

II. Objectif d'observation

III. Banc optique

IV. Résultats obtenus

V. Conclusion

CONCLUSION

ANNEXES

FIGURES

BIBLIOGRAPHIE

NOMENCLATURE

Avertissement

Le même symbole pouvant être attribué à plusieurs grandeurs différentes, la définition utilisée résulte sans ambiguïté possible du contexte.

Lettres latines

A, A_o, A_1	:	coefficients
a	:	vitesse du son ; coefficient ; diamètre des bulles
$a\ (x_1)$	:	limite inférieure de validité de la loi de vitesse déficitaire
B, B_o, B_1	:	coefficients
b	:	coefficient
$b\ (x_1)$	:	limite supérieure de validité de la loi de paroi
C, C_o, C_1	:	coefficients
C_{XY}	:	intercorrélation des fonctions X et Y
D	:	diamètre
E	:	énergie interne massique ; éclairement
e	:	demi largeur du canal de section rectangulaire allongé
$\vec{F}$	:	force
F_r	:	nombre de Froude

f	:	fonction ; coefficient de frottement
$f_{g \longrightarrow L}$	:	force exercée par le gaz sur le liquide
G, G_o, G_1	:	coefficients
G	:	glissement local ; fonction densité de probabilité des vitesses
g	:	fonction ; accélération de la pesanteur ; granularité ; grandissement
$g\ (V, D)$	:	densité de probabilité conditionnelle de la vitesse et du diamètre
H, H_o, H_1	:	coefficients
H	:	demi-courbure moyenne de l'interface ; fonction d'Heaviside ; hauteur
h	:	densité de probabilité des diamètres ; largeur du canal "Holographie" ; fonction
I	:	intensité lumineuse
i	:	flux
$\vec{J}$	:	densité de flux de chaleur
K	:	coefficient de Prandtl
K_1 à K_8	:	coefficients
k	:	coefficient de contraction
l	:	longueur de Prandtl ; distance entre extrémités de la bisonde
M	:	débit massique par unité de surface ; point courant
$\mathcal{M}_L$	:	nombre de Mach liquide
m	:	débit massique local par unité de surface
N_1, N_2	:	indices limites définis chap. 1 § III-2
N_I	:	nombre d'interfaces passant au point d'étude pendant le temps d'intégration

$\vec{n}$	:	normale unitaire aux interfaces
n	:	indice ; indice de réfraction ; exposant
O_1, O_2	:	objectifs d'observation
p	:	pression ; indice
Pr	:	nombre de Prandtl
Q	:	débit volumique
R	:	rayon du canal de section circulaire
Re	:	nombre de Reynolds
R_*	:	nombre de Reynolds défini à partir de la vitesse de frottement à la paroi
r	:	coordonnée cylindro-polaire ; constante des gaz parfaits ; distance centre bulle - axe de la sonde
S	:	section ; source
s	:	coordonnée curviligne ; section du diaphragme
T	:	température ; flux aux interfaces ; temps d'intégration
T_1, T_2	:	impulsions de déclenchement de la caméra ultra-rapide
$\overline{\overline{\mathcal{T}}}$	:	tenseur des contraintes
t	:	temps
U ou $\mathcal{U}$	:	vitesse débitante
$\overline{\overline{U}}$	:	tenseur unité
u	:	composante de la vitesse selon l'axe du canal
u_*	:	vitesse de frottement à la paroi
u_∞	:	vitesse à l'infini
u_m	:	vitesse au centre du canal
$\vec{V}$	:	vecteur vitesse
$\mathcal{V}$	:	volume
V_∞	:	vitesse à l'infini

V_1, V_2, V_3 : vannes

V_m : vitesse moyenne mesurée avec la bisonde

v : coordonnée selon l'axe Ox_2 (ou Oy)

Wb : nombre de Weber

w : coordonnée selon l'axe Ox_3

X : coefficient de Lockart et Martinelli ; signal délivré par la sonde

X_K : distribution d'existence de la phase K

x : coordonnée d'espace ; titre massique

Y : signal délivré par la deuxième extrémité de la bisonde

y : coordonnée perpendiculaire à l'axe du canal

y' : pouvoir séparateur

z : coordonnée parallèle à l'axe du canal ; coordonnée parallèle à la verticale

Lettres grecques

α : taux de vide

γ_K : glissement local

ΔX : distance entre centres de bulles

δ : distribution de Dirac

ε : polynome

$\bar{\bar{\varepsilon}}$: tenseur des contraintes

θ : coordonnée cylindro-polaire

Λ : coefficient de perte de charge

λ : longueur d'onde ; coefficient

μ : viscosité dynamique

ν : viscosité cinématique

ρ : masse volumique

Σ	:	surface
σ	:	tension superficielle
σ_f	:	saut de f
τ	:	contrainte tangentielle ; écart de temps
$\overline{\overline{\tau}}$	:	déviateur des contraintes
$\overline{\tau_o}$	:	contrainte tangentielle à la paroi
ϕ	:	coefficient de Lockart et Martinelli ; diamètre ; flux lumineux
Ψ	:	fonction test ; angle du canal avec la verticale
Ψ_o	:	constante
ψ	:	grandeur dont on exprime le principe de conservation
Ω	:	angle solide

Indices

a	:	accélération
atm	:	atmosphère
C	:	centre du canal ; critique
d	:	diaphragme ; déficitaire
eq	:	équivalent
exp	:	expérience
E	:	entrée
f	:	frottement
G ou g	:	gaz
H	:	hydraulique
h	:	hydrostatique
I	:	interface
i	:	indice correspondant à l'axe Ox_i

K	:	phase quelconque (K = G ou L)
L ou l	:	liquide
S	:	sortie
SP	:	simple - phase
Tp	:	double - phase
t_g	:	temps de passage du gaz
t_l	:	temps de passage du liquide
Δt	:	intervalle de temps
ΔX	:	distance entre extrêmités de la bisonde
+	:	variable adimensionnalisée

Symboles

$< >$	:	moyenne surfacique
$\overline{\quad}$	:	moyenne temporelle
$'$	:	fluctuation ; dérivée ; variable adimensionnalisée
$\sum$	:	somme
$\{ \}$	:	au sens des fonctions
$*$	:	produit de convolution
$\otimes$	:	produit tensoriel
$\vec{\nabla}$	:	gradient
$\sqcap\!\sqcup$	:	fonction porte
$\| \|$	:	valeur absolue
$\sim$	:	équivalent
δ_{ij}	:	symbole de Kronecker

PREMIERE PARTIE

CONTRIBUTION THEORIQUE A L'ETUDE

DYNAMIQUE DES ECOULEMENTS

DIPHASIQUES GAZ - LIQUIDE

- - - -

INTRODUCTION

L'importance des écoulements diphasiques gaz-liquide dans l'ingenierie contemporaine est indéniable. On les rencontre dans des domaines aussi divers que :

- le génie atomique
- le génie chimique
- l'extraction et le transport des produits pétroliers
- la propulsion marine ou sous-marine
- le pompage par "air-lift"

Leur étude n'est pas récente mais s'est considérablement développée depuis une trentaine d'années, parallèlement à l'expansion de ces disciplines. Les résultats obtenus sont nombreux, mais aucune des théories proposées n'a atteint un degré de généralité suffisant pour les englober tous. Il nous paraît utile de rappeler brièvement dans cette introduction l'état actuel des connaissances sur le sujet, ce qui nous permettra de mieux situer notre contribution et de montrer l'apport qu'elle constitue.

I. Généralités

1. Les écoulements diphasiques peuvent être à un ou plusieurs constituants , avec ou sans transfert de masse entre phases.

2. Ils sont ordinairement classés selon leur configuration, c'est-à-dire l'arrangement morphologique statistique des phases. Celle-ci est fonction entre autres choses :

- de la nature des fluides en présence
- des conditions aux frontières (notamment de l'inclinaison du canal d'études par rapport à l'horizontale)
- des débits de chacune des phases.

La différenciation des configurations repose le plus souvent sur des observations visuelles, parfois complétées par des méthodes moins subjectives : comparaison avec les gradients de pression [1], les fluctuations des pressions statiques [2] ou les informations statistiques obtenues grâce à des sondes placées dans l'écoulement [3]. Bien que la terminologie varie selon les auteurs, on distingue le plus souvent les types d'écoulements schématisés sur la figure 01, soit :

a) En conduites horizontales, d'après ALVES [4]

- Les écoulements à bulles (bubble flow)
- Les écoulements à poche (plug flow)
- Les écoulements stratifiés (stratified flow)
- Les écoulements à vagues (wavy flow)
- Les écoulements à bouchons (slug flow)
- Les écoulements annulaires (annular flow)
- Les écoulements à brouillard (mist or spray flow)

b) En conduites verticales, d'après SMISSAERT [5]

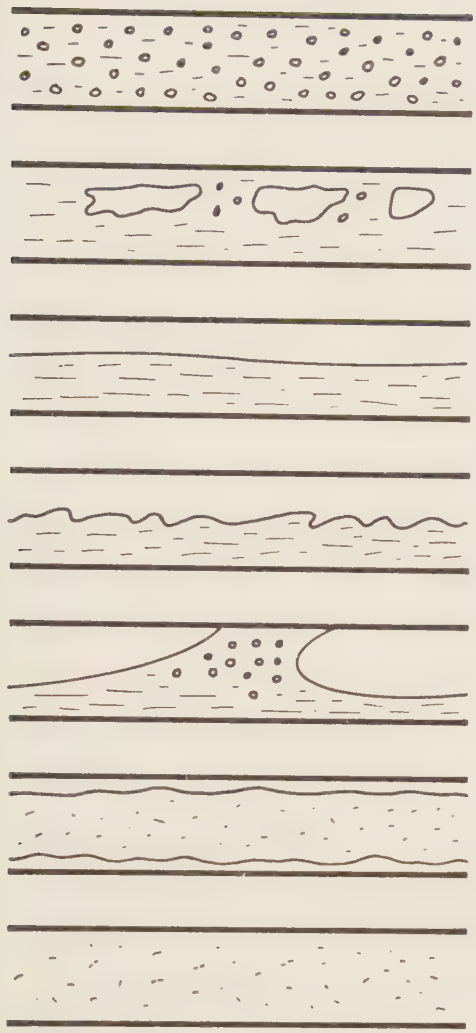
- Les écoulements à bulles (bubble flow)
- Les écoulements à bouchons (slug glow)
- Les écoulements à forte coalescence (churn flow)
- Les écoulements annulaires (annular flow)
- Les écoulements à brouillard (mist flow)

Afin de préciser les conditions d'existence de l'une ou l'autre de ces configurations, la plupart des auteurs en ont délimité les frontières sur des "cartes" dont on trouvera des exemples dans [6].

Cependant les diverses conditions expérimentales et la mauvaise définition de ces frontières entraînent des divergences entre les "cartes" proposées. Les études menées sur les transitions d'un type d'écoulement à un autre permettront sans doute de clarifier ce sujet [7].

3. La présence du gaz rend le mélange diphasique compressible. Il s'ensuit que :

a) L'écoulement dans un canal de section constante ne peut pas être considéré comme établi si ce n'est dans certains cas particuliers, où la variation de pression relative est négligeable.



(a) CONDUITES HORIZONTALES

(b) CONDUITES VERTICALES

Fig. O.1 _ Configurations d'écoulements en conduites

b) L'existence d'un débit critique ([8], [9]) impose des contraintes aux utilisateurs (par exemple dans le cas de la sûreté nucléaire). L'étude du débit critique est dans ce cas plus complexe qu'elle ne l'est en écoulement simple-phase, dans la mesure où sa liaison avec la vitesse du son n'a pu être clairement établie. Cette dernière est d'ailleurs mal connue et appliquer sa définition ("vitesse de propagation d'une onde de pression") ne permet d'en obtenir des expressions que dans le cadre des modèles simplifiés dont nous parlons plus loin.

4. Les phases évoluent en général à des vitesses différentes en raison des différences de grandeur entre leurs caractéristiques physiques respectives (masses volumiques, viscosités...).

Cela a conduit à introduire les notions de :

a) glissement local : différence des vitesses ponctuelles

b) glissement moyen : différence des vitesses moyennes (celle-ci étant le rapport du débit volumique à l'aire de la section de passage traversée par la phase).

c) taux de glissement : rapport des vitesses moyennes.

5. D'autre part, les quantités relatives de chacune des phases sont ordinairement caractérisées par :

a) le titre massique (ou qualité) qui est le rapport du débit massique du gaz au débit massique total. On peut remarquer que le titre massique reste constant dans un écoulement à deux constituants sans transfert de masse.

b) le titre volumique, qui est le rapport du débit volumique du gaz au débit volumique total dans une section de passage normale à l'axe de l'écoulement moyen.

c) le taux de vide : rapport, en chaque point du canal, du temps de présence du gaz à un temps total donné. Ce paramètre, d'une très grande importance, sera redéfini axiomatiquement dans le premier chapitre de notre exposé.

d) le taux de vide surfacique : c'est le rapport de la section de passage traversée par le gaz à la section de passage totale. En raison du glissement, le taux de vide surfacique est en général différent du titre volumique.

e) le taux de vide volumique : c'est le rapport du volume du gaz dans une partie donnée du canal au volume de cette partie du canal, à un instant donné. Ce paramètre, dont le complément à l'unité est fréquemment appelé "hold-up", doit son importance au fait qu'il a longtemps été le seul des taux de vide à pouvoir être mesuré facilement par l'emploi de vannes à fermeture rapide.

*
* *
*

Les études consacrées aux écoulements à deux phases ont donc porté sur la description expérimentale de ces divers paramètres et fonctions et des relations qui les lient, ainsi que sur la compréhension des phénomènes physiques mis en jeu. Les façons d'aborder le problème peuvent être classées en quatre catégories :

- extrapolation des études sur la bulle isolée
- corrélations
- modèles
- application des principes de la mécanique des milieux continus.

II. Approches du problème

1. Extrapolation des études sur la dynamique de la bulle isolée

La première approche du problème a consisté à étudier la dynamique d'une bulle isolée au sein d'un liquide au repos ou en mouvement [10 à 13] et à en extrapoler certaines caractéristiques du mélange diphasique.

Cette approche n'a permis d'obtenir des résultats intéressants que dans des cas très particuliers, tels que le calcul d'une viscosité équivalente du mélange diphasique [14 à 16] dans des domaines restreints du taux de vide ($\alpha < 0,1$).

Sans approfondir cette approche, nous nous référerons au cours de notre étude à certains des résultats qu'elle a permis d'obtenir.

2. Corrélations

Une deuxième approche a consisté à utiliser certains résultats expérimentaux pour faire apparaître des corrélations entre des quantités dimensionnelles ou adimensionnelles considérées comme prépondérantes. Ces corrélations présentent de l'intérêt en tant qu'elles peuvent être facilement appliquées au calcul de machines dans des conditions identiques à celles qui ont servi à les obtenir. Elles n'ont en général pas de base théorique, mais ont été parfois justifiées a postériori par l'utilisation des modèles dont nous parlerons dans le paragraphe suivant.

Une des plus utilisées est celle que LOCKART et MARTINELLI [17] ont mis en évidence entre les quantités

$$\phi_{\text{Lou G}} = \left[\frac{dp/dz}{(dp/dz)_{\text{Lou G}}} \right]^{1/2} \quad , \alpha \text{ et } X = \left[\frac{(dp/dz)_L}{(dp/dz)_G} \right]^{1/2}$$

où $\frac{dp}{dz}$, $\left(\frac{dp}{dz}\right)_L$, $\left(\frac{dp}{dz}\right)_G$ sont les gradients de pression de l'écoulement dans le canal respectivement du mélange diphasique, du liquide seul de même débit et du gaz seul de même débit. α est le taux de vide volumique mesuré grâce à des vannes à fermeture rapide. Cette corrélation, valable pour un mélange à deux composants, a été obtenue pour des tubes horizontaux de petit diamètre, à des pressions voisines de la pression atmosphérique, sans tenir compte du type d'écoulement.

Un grand nombre d'autres corrélations, est disponible dans la littérature, permettant de prévoir les pertes de pression ou le hold-up en écoulement à deux phases [18 à 22].

DUKLER et al. [22] par exemple ont testé la corrélation de LOCKART et MARTINELLI sur un ensemble de 2300 résultats obtenus par divers auteurs (écart-type calculé de 36 % ; corrélation vérifiée à moins de 25 % pour 68 % de résultats). Ils ont eux-mêmes suggéré pour les écoulements horizontaux une corrélation basée sur l'analyse dimensionnelle. Ils se contentent cependant de reprendre analogiquement certains paramètres sans dimension de la mécanique des fluides monophasiques (nombres de Reynolds, d'Euler et de Froude).

Leur corrélation donne des résultats statistiques légèrement meilleurs que celle de LOCKART et MARTINELLI, mais non parfaitement probants [21].

3. Modèles

Afin d'expliquer les résultats expérimentaux obtenus et de prévoir le comportement du fluide diphasique dans un canal quelconque, divers auteurs ont construit des modèles :

- en donnant à l'écoulement une structure simplifiée,
- en transposant des résultats ou des théories valables pour les écoulements monophasiques.

Les plus simples de ces modèles sont les modèles dits "homogène" et "à phases séparées".

a) Le modèle homogène ramène l'étude de l'écoulement diphasique à celle d'un monofluide équivalent. Il repose sur les hypothèses suivantes :

- l'écoulement est monodimensionnel
- le glissement moyen est nul
- les propriétés physiques du mélange sont constantes.

Le choix des propriétés physiques significatives varie selon les auteurs. La masse volumique est généralement prise égale à $\rho = <\alpha> \rho_g + (1 - <\alpha>) \rho_L$ où $<\alpha>$ est le taux de vide surfacique, qui s'assimile, dans le cadre des hypothèses du modèle, au titre volumique. Par contre la viscosité est représentée par une multitude d'expressions dont les unes proviennent de l'extension des études sur la bulle isolée (comme $\mu = \mu_L (1 + 2{,}5\ \alpha)$ ([14])) ce qui limite leur domaine de validité et dont les autres consistent en viscosités fictives obtenues en pondérant les viscosités des deux phases par des coefficients convenablement choisis, par exemple :

$$\mu = <\alpha> \mu_g + (1 - <\alpha>) \mu_L \qquad [22]$$

$$\mu = x\ \mu_g + (1 - x) \mu_L \qquad [23]$$

$$\frac{1}{\mu} = \frac{x}{\mu_g} + \frac{1-x}{\mu_L} \qquad |24|$$

(x représente le titre massique)

Ce problème du choix d'une viscosité équivalente se retrouve d'ailleurs dans chaque modèle qui tend à ramener à priori l'étude du fluide diphasique à celle d'un fluide équivalent monophasique, même si celui-ci est à propriétés physiques variables, comme c'est le cas dans les modèles plus élaborés que nous analysons ci-dessous.

Les équations qui représentent le modèle homogène sont simples. Le taux de vide est obtenu à partir de la donnée des débits volumiques de chacune des phases par la relation :

$$\langle \alpha \rangle = \frac{Q_g}{Q_g + Q_L} = \frac{1}{1 + \frac{1-x}{x}\frac{\rho_g}{\rho_L}}$$

où x est le titre massique.

Les pertes de charge sont calculées grâce aux coefficients de frottement des monofluides, pour des nombres de Reynolds obtenus avec la masse volumique et la viscosité équivalentes choisies.

D'autre part ce modèle permet d'obtenir une expression simple de la vitesse du son, définie comme en écoulement monophasique compressible par

$$a = \sqrt{\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s} \qquad |25|$$

b) Le modèle à phases séparées |26|, également monodimensionnel, est construit en juxtaposant les écoulements des deux phases ; leur liaison, correspondant aux transferts entre phases, est réalisée par la complémentarité des aires du canal traversées, ainsi que par une autre condition qui peut être l'égalité dans chaque section des gradients de pression totale existant dans chaque phase |27|.

Ce modèle a également permis à divers auteurs de proposer des expressions de la vitesse du son en écoulement à deux phases, utilisant toujours la formule des écoulements monophasiques : $a = \left|(\partial p/\partial \rho)_S\right|^{1/2}$. Le problème est celui du choix de la masse volumique moyenne des deux phases. Diverses expressions existent, justifiées par divers rapports intervenant dans les équations, tels que $\langle \rho \rangle$, $\frac{\langle \rho u \rangle}{\langle u \rangle}$, $\frac{\langle \rho u \rangle^2}{\langle \rho u^2 \rangle}$ |27 à 32| où les crochets représentent des moyennes sur la section de passage totale.

Pratiquement l'un ou l'autre de ces modèles est choisi selon que sa structure est plus ou moins semblable à la configuration réelle de l'écoulement étudié. Cependant, dès que l'on s'écarte des types d'écoulement qui les ont inspirés (écoulement à très faible quantité de gaz pour le modèle homogène, écoulement annulaire pour le modèle à phases séparées), ils cessent de prédire de façon correcte les résultats expérimentaux.

Divers auteurs ont donc présenté des modèles plus élaborés, qui font intervenir des profils transversaux de taux de vide et de vitesse. L'influence de ces facteurs sur les relations entre le taux de vide surfacique, le rapport des vitesses moyennes et les débits des phases a été montrée de façon générale par ZUBER et FINDLAY [33] . Leur connaissance devrait aussi permettre de définir de façon plus cohérente la liaison entre les débits et les pertes de pression par frottement, comme c'est le cas en écoulement monophasique, par l'intermédiaire d'un nombre de Reynolds.

Il nous paraît intéressant de montrer sur quelques exemples comment les profils sont introduits et utilisés pour déterminer la perte de pression par frottement. Nous analysons dans ce but les modèles proposés par BANKOFF |34| en 1960, LEVY |35| en 1963, BROWN et KRANICH |36| en 1968 et BEATTIE |37| en 1972 afin d'en montrer l'esprit et l'évolution.

BANKOFF et LEVY, dans des modèles entièrement théoriques qu'ils confrontent a postériori à l'expérience, supposent qu'il n'y a pas de glissement local. Le fluide est donc assimilé à un monofluide à propriétés physiques variables. Par contre, BROWN et KRANICH admettent l'existence d'un glissement local perpendiculaire à l'axe de l'écoulement afin d'expliquer les dissymétries constatées dans les profils de taux de vide. Ce glissement n'intervient cependant pas car les équations qu'ils utilisent sont moyennées surfaciquement. BROWN et KRANICH introduisent en outre des données expérimentales au cours de l'élaboration de leur modèle.

Quant à BEATTIE, son modèle, limité à la description de la structure d'un écoulement à bulles (profils de taux de vide et de vitesse), privilégie la phase continue (le liquide dans un écoulement à bulles) où s'effectue, d'après lui, de façon prédominante, la turbulence, ce qui introduit naturellement un glissement local.

c) BANKOFF admet a priori que des lois en puissance représentent les variations transversales du taux de vide et de la vi-

tesse. Aucune tentative n'est faite pour relier logiquement ces profils aux pertes de pression par frottement ; BANKOFF reprend simplement les formules des monofluides qu'il adapte de la façon suivante : au coefficient de frottement $f_L = \frac{\tau_o S_p}{1/2\ \rho_L\ U_L^2}$ en liquide seul évalué grâce à la formule de Blasius $f_L = B_1 \left(\frac{D_H U_L \rho_L}{\mu_L} \right)^{-1/4}$, il fait correspondre un coefficient de frottement en écoulement diphasique, défini par $f = \tau_o / \frac{1}{2} \langle \bar{\rho} \rangle \langle \bar{u} \rangle^2$, qu'il calcule grâce à la même formule, sous la forme $f = B_1 (D_H \langle \bar{\rho} \rangle \langle \bar{u} \rangle / \langle \bar{\mu} \rangle)^{-1/4}$. L'expression des profils lui sert donc uniquement à évaluer les valeurs surfaciques de la vitesse $\langle \bar{u} \rangle$ et de la masse volumique $\langle \bar{\rho} \rangle = (1 - \langle \bar{\alpha} \rangle) \rho_L + \langle \bar{\alpha} \rangle \rho_g$, la viscosité moyenne $\langle \bar{\mu} \rangle$ étant prise égale à celle du liquide. Rien ne justifie à priori l'identité des formules pour les deux types d'écoulement. De plus on ne comprend pas pourquoi BANKOFF choisit comme nombre de Reynolds le rapport $D_H \langle \bar{\rho} \rangle \langle \bar{u} \rangle / \langle \bar{\mu} \rangle$ plutôt que $D_H \langle \overline{\rho u} \rangle / \langle \bar{\mu} \rangle$ ou $D_H \langle \overline{\rho u^2} \rangle / \langle \overline{\mu u} \rangle$, qui ont été suggérés, sans plus de justification sérieuse, par d'autres auteurs [22].

d) LEVY déduit les profils adimensionnels de vitesse et de masse volumique (donc de taux de vide) des deux relations suivantes :

$$\tau_o = l^2 \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \frac{\partial \bar{\rho}\,\bar{u}}{\partial y} + \mu \frac{\partial \bar{u}}{\partial y}$$

$$\bar{\rho} = A\, \overline{\rho\, u} + B$$

l'adimensionnalisation se basant sur les paramètres physiques du liquide et sur la vitesse de frottement $\sqrt{\tau_o / \rho_L}$. Dans ces deux relations la barre représente une moyenne statistique ou temporelle locale. La première de ces relations provient de l'introduction de la longueur de mélange l : s'inspirant librement de PRANDTL LEVY relie en effet les fluctuations de masse volumique et de vitesse aux gradients des valeurs moyennes correspondantes pour exprimer la contrainte tangentielle à la paroi τ_o. La longueur de mélange est prise sous la forme proposée par VAN DRIEST [38] : $l = K y\ (1 - \exp(-y/F))$. La deuxième relation, liant la masse volumique locale et la vitesse locale, est inspirée d'une relation analogue obtenue par PAI [39] pour traiter le mélange de deux gaz.

Les constantes A et B sont déduites des conditions aux frontières (liquide à la paroi et symétrie des profils par rapport à l'axe de l'écoulement moyen) tandis que K et F gardent les valeurs qu'elles ont en écoulement monofluide.

μ est supposé égal à $\mu_L\ (1 + 2{,}5\ \alpha(\rho_L - \rho_g)/\rho_L)$, qui est une modification de la viscosité d'EINSTEIN.

On constate donc que, dans ce modèle, la liaison entre les pertes de pression par frottement et les profils est claire. La contrainte tangentielle est déduite ensuite d'une relation implicite obtenue en introduisant la masse volumique moyenne et le débit total par unité de surface M du mélange, ce qui fait apparaître logiquement le nombre de Reynolds $M D_H/\mu_L$. Ce modèle cohérent repose cependant sur des relations que rien ne justifie et qui conservent arbitrairement les valeurs de paramètres (K et F) valables en écoulement monophasique. Nous montrerons plus loin que certaines constantes, universelles pour tous les écoulements monofluides, cessent de l'être lorsque deux phases sont en présence : le titre massique, le rapport des viscosités... interviennent notamment dans leur variation, même si l'on fait l'hypothèse de non-glissement local.

e) BROWN et KRANICH font reposer leur modèle :

- sur une relation expérimentale entre le taux de vide et la vitesse diphasique locale, obtenue en prélevant isocinetiquement des échantillons du mélange en divers points, pour diverses conditions de débits ;

- sur une analogie entre monofluides et écoulements à deux phases : les équations moyennées surfaciquement ont en effet, dans le cadre des hypothèses des auteurs, la même forme. BROWN et KRANICH en déduisent, d'une part, que les profils de vitesse doivent satisfaire à la forme logarithmique suivante :

$$u_{TP}\ (\rho_{TP}/\tau)^{1/2} = K_1\ \mathrm{Log}\ \left[(R-r)\ (\tau/\rho_{TP})^{1/2}\ \rho_{TP}/\mu_{TP}\right] + K_2 \qquad (1)$$

(l'indice TP représente ici une moyenne locale sur les deux phases) ; et, d'autre part, que la contrainte tangentielle à la paroi peut être calculée grâce aux formules

$$\tau_o = \frac{1}{2}\ f\ \langle \overline{\rho u^2} \rangle \qquad \text{ou} \qquad f = 0{,}00144 + 0{,}138\ \ Re^{-0{,}331}$$

avec $Re = \langle \overline{\rho u^2} \rangle\ D\ /\langle \overline{\mu u} \rangle$ (les crochets indiquent une moyenne surfacique comme précédemment).

La détermination explicite des profils et de la contrainte tangentielle à la paroi résulte ensuite d'un calcul itératif. Ce modèle constitue un progrès par rapport aux précédents, dans la mesure où il fait intervenir une relation expérimentale dans son élaboration (même si la qualité des prélèvements cinétiques est douteuse, comme l'ont fait remarquer certains auteurs [40]). Cependant, là aussi, rien ne justifie les formules théoriques employées. L'analogie constatée entre écoulements simple et double phases ne suffit pas à justifier le profil de vitesses tel qu'il est écrit (1) : on peut d'ailleurs remarquer que ce profil est basé ici sur une vitesse de frottement fonction du point, ce qui n'est pas le cas en écoulement monophasique, où la masse volumique est constante radialement. De plus, rien ne justifie l'identité des formules donnant le frottement en fonction du nombre de Reynolds pour les deux types d'écoulement. Cela rejoint les remarques que nous avons déjà faites pour les deux modèles précédemment étudiés.

f) Le modèle de BEATTIE est voisin de celui de LEVY ; il repose sur les deux relations :

$$\tau = (1 - \alpha)\, \rho_L\, \overline{u'_L\, v'_L} = (1 - \alpha)\, \rho_L \left(k\, y\, \frac{\partial U_L}{\partial y} \right)^2 \qquad (1)$$

$$\alpha = a\, U_L + b \qquad (2)$$

dont la première exprime, grâce à la longueur de mélange de PRANDTL, la contrainte turbulente supposée entièrement assumée par la phase continue, loin de la paroi, et dont la seconde est une relation non justifiée entre taux de vide et vitesse du liquide.

BEATTIE, contrairement à LEVY, n'introduit pas de longueur de mélange pour le taux de vide α.

Des relations (1) et (2) il déduit un profil de taux de vide de la forme :

$$(1 - \alpha)^{3/2} = (1 - \alpha_c)^{3/2} - \frac{a\, u_{*_L}}{2/3\, k} \operatorname{Log}\, y/R$$

où R est le rayon du tube

α_c est le taux de vide au centre

k est la constante qui intervient dans la théorie de la longueur de mélange de Prandtl

u_{*_L} est la vitesse de frottement : $u_{*_L} = \sqrt{\tau_o / \rho_L}$

* *

Les modèles sont nombreux et ne peuvent être tous cités ici. Ils ne permettent de retrouver les résultats expérimentaux que dans des cas particuliers, même s'ils prédisent, aussi bien les uns que les autres, les ordres de grandeur. Ils ont un certain nombre de caractéristiques communes qu'on peut mettre en évidence à partir des modèles analysés ci-dessus.

1. Les équations sur lesquelles ils sont contruits sont en général incomplètes, sinon erronées [41], faute d'avoir écrit préalablement un système d'équations basé sur l'application rigoureuse des principes de la mécanique des milieux continus.

2. La relation entre contraintes et déformations pose un problème que ne peut résoudre de façon satisfaisante l'usage d'une viscosité équivalente, surtout quand elle prend une forme fictive que rien ne justifie, comme par exemple $\mu_{eq} = x\,\mu_g + (1 - x)\,\mu_L$.

3. Faute d'une étude de similitude réalisée sur les écoulements diphasiques, les auteurs utilisent les paramètres adimensionnels mis en évidence dans le cas d'écoulements monofluides et négligent tous les paramètres propres aux écoulements diphasiques qui se ramèneraient à l'unité dans le cas d'écoulements monophasiques (rapport de propriétés physiques homologues,...).

4. Les formules liant ces paramètres aux profils ou aux pertes de pression par frottement sont celles des écoulements monophasiques ; les constantes intervenant dans ces formules sont en général inchangées.

4. Application des principes de la mécanique des milieux continus

Chercher un système d'équations rigoureuses, basé sur la transcription analytique correcte et complète des principes généraux de conservation de la masse, de la quantité de mouvement (loi de Newton) et de l'énergie (premier principe de la thermodynamique), s'est donc imposé comme indispensable, même si ce système devait être complexe et non-immédiatement utilisable pour des applications industrielles.

La méthode utilisée [42 à 49] consiste d'abord à écrire sous une forme intégrale les principes précédents , puis à appliquer des théorèmes mathématiques qui conduisent à l'obtention d'équations locales à dérivées partielles.

- Si chaque élément de volume contient les deux phases, il est appelé "diphasique". L'utilisation de cet élément de volume

correspond à des écoulements où la phase dispersée est finement divisée et partout présente, donc à des types d'écoulements particuliers (écoulements à très petites bulles réparties de façon homogène). Elle suppose la possibilité de définir la concentration locale de chacune des phases. Enfin elle masque certains phénomènes spécifiques aux interfaces (tension superficielle).

- Par contre l'utilisation de l'élément de volume monophasique (c'est-à-dire tel qu'il ne contienne qu'une seule phase) est plus générale, car elle s'applique à d'autres configurations d'écoulement, et permet de décrire plus finement les phénomènes locaux (au moyen d'instruments de mesure perfectionnés, par exemple). Elle implique toutefois l'hypothèse que les interfaces sont sans épaisseur. Le théorème de l'intégrale nulle, appliqué aux principes de conservation sous forme intégrale, conduit dans ce cas à l'écriture de trois systèmes d'équations locales et instantanées (un pour chaque phase et un pour les interfaces) dont chacun est valable à tour de rôle en un point donné du canal d'étude.

Les difficultés qu'entraîne la complexité de ces systèmes d'équations, sous leur forme locale instantanée ou sous une forme moyennée (moyenne statistique, temporelle ou spatiale) imposent de formuler, pour toute application, des hypothèses simplificatrices suggérées par l'expérience et, bien souvent, de mettre au point des codes de calcul.

Cette écriture est cependant un grand progrès, dans la mesure où toutes les variables intervenant dans les écoulements à deux phases sont prises en compte. Telles qu'elles sont elles permettent de faire des études de similitude, et donc de montrer quel est l'ensemble des paramètres intervenant [50, 51].

Nous détaillerons dans le chapitre 1 ces équations qui sont à la base de notre étude.

III. But et intérêt de cette contribution

Nous avons tenté jusqu'ici de montrer quelles avaient été les principales méthodes utilisées pour prédire les caractéristiques de l'écoulement d'un fluide diphasique dans un canal :

- les extrapolations des études sur la bulle isolée ont des domaines d'application restreints.

- les corrélations expérimentales ne sont utilisables que dans des conditions identiques à celles de leur obtention, avec une précision parfois prohibitive.

- les modèles souffrent de ne pas avoir de base théorique rigoureuse, et doivent s'appuyer sur un nombre limité de paramètres adimensionnels adaptés de l'étude des écoulements simple-phase.

- la transcription analytique rigoureuse des principes fondamentaux de la mécanique des milieux continus conduit à l'écriture de trois systèmes d'équations pour le fluide diphasique, ce qui rend difficile l'application de méthodes classiquement utilisées dans l'étude des écoulements monophasiques, telle que la méthode asymptotique utilisée par A. FORTIER [52] dont on trouvera le principe dans [53].

Nous avons donc cherché à écrire pour le fluide diphasique un système unique d'équations, valable à tout instant en chaque point. C'est l'objet de notre premier chapitre. Cette écriture a été rendue possible grâce à l'utilisation de la théorie mathématique des distributions [54] qui a prouvé sa fécondité dans d'autres domaines de la physique comme l'électromagnétisme [55]. Nous verrons comment elle permet notamment de montrer de façon générale le caractère non-newtonien du fluide diphasique, ce qui relègue à des cas particuliers la recherche d'une viscosité équivalente.

Le deuxième chapitre est une application de la théorie précédente à un cas particulier important dans la pratique : celui de l'écoulement turbulent d'une émulsion dans un canal de section constante. Nous y montrons comment l'écriture des équations de conservation au sens des distributions permet de déterminer la forme des profils de la vitesse moyenne, puis une relation entre le coefficient de frottement et un nombre de Reynolds qui intervient de façon logique, enfin l'expression de la perte de pression totale dans le canal.

CHAPITRE 1

EQUATIONS GENERALES DE CONSERVATION

I. Equations locales instantanées d'un écoulement diphasique, au sens des distributions

1. Rappel

Les équations locales instantanées d'un écoulement sont la traduction analytique en chaque point et à tout instant du principe de conservation de la masse, de la loi de Newton (conservation de la quantité de mouvement) et du premier principe de la thermodynamique (conservation de l'énergie).

Dans le cas d'un écoulement à deux phases gaz-liquide, l'application de ces principes généraux a conduit [47,56] à l'écriture de trois systèmes d'équations : un système pour chacune des phases et un système de relations exprimant les transferts à travers les interfaces.

Il est commode d'écrire sous une forme condensée l'ensemble de ces équations en utilisant les notations suivantes :

- La phase considérée est indicée par la lettre K : K = G pour le gaz et K = L pour le liquide. L'interface est indicée par la lettre I.

- La grandeur rapportée à l'unité de masse, dont nous voulons exprimer le principe de conservation est représentée par la fonction Ψ

$i(\Psi)$ représente le flux de cette grandeur

$S(\Psi)$ représente la source de cette grandeur par unité de masse.

$I(\Psi)$ représente le flux limite de cette grandeur à l'intersection des interfaces et du volume d'étude quand ce dernier tend vers zéro.

$T(\Psi)$ peut toujours s'écrire sous la forme

$$T(\Psi) = \mathrm{div}_S\, T_1(\Psi)\, \bar{\bar{U}} + 2\, T_1(\Psi)\, H\, \vec{n}_G$$

où $2H$ est la courbure moyenne de l'interface

$\bar{\bar{U}}$ est le tenseur unité

$\vec{n}_G$ est la normale unitaire à l'interface dirigée vers l'extérieur de la phase gazeuse.

Les valeurs prises par Ψ, $i(\Psi)$, $S(\Psi)$ et $T_1(\Psi)$ dans les cas de la conservation de la masse, de la quantité de mouvement ou de l'énergie sont données dans le tableau I ci-dessous.

	Ψ	$i(\Psi)$	$S(\Psi)$	$T_1(\Psi)$
Masse	1	0	0	0
Quantité de mouvement	$\vec{V}$	$-\bar{\bar{\mathcal{C}}}$	$\vec{F}$	$-\sigma$
Energie	$\frac{1}{2}\lvert\vec{V}\rvert^2 + E$	$-\bar{\bar{\mathcal{C}}}.\vec{V} + \vec{J}$	$\vec{F}\,.\,\vec{V}$	$-\sigma\ \vec{V}$

Tableau 1

où $\vec{V}$ est la vitesse

E est l'énergie interne massique

$\bar{\bar{\mathcal{C}}}$ est le tenseur des contraintes : $\bar{\bar{\mathcal{C}}} = -p\,\bar{\bar{U}} + \bar{\bar{\tau}}$

p est la pression

$\bar{\bar{\tau}}$ est le déviateur des contraintes

$\vec{J}$ est le vecteur densité de flux de chaleur

$\vec{F}$ est la force extérieure par unité de masse

σ est la tension superficielle

Compte tenu de ces notations, les équations locales instantanées relatives aux grandeurs Ψ s'écrivent :

- dans le gaz :

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho_G\,\Psi_G + \mathrm{div}\left[\rho_G\,\Psi_G\,\vec{V}_G + i(\Psi_G)\right] - \rho_G\,S(\Psi_G) = 0 \qquad (1\text{-}1)$$

- dans le liquide :

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho_L\,\Psi'_L + \mathrm{div}\left[\rho_L\,\Psi'_L\,\vec{V}_L + i(\Psi_L)\right] - \rho_L\,S(\Psi_L) = 0 \qquad (1\text{-}2)$$

Quant aux relations d'interface, elles ont la forme :

$$\sum_{K=G,L} \left\{ \left[\rho_K \Psi_K (\vec{V}_K - \vec{V}_I) + i (\Psi_K) \right] . \vec{n}_K \right\} + T(\Psi) = 0 \qquad (1\text{-}3)$$

ρ_K représente la masse volumique de la phase K.

Les équations (1-1), (1-2) et (1-3) traduisent les principes de conservation à l'intérieur de chacune des phases et les transferts à travers les interfaces.

Elles ne sont pas définies simultanément en chaque point de l'écoulement car le gaz, le liquide et les interfaces ne peuvent exister simultanément en un point donné.

Ces équations ne constituent donc pas un système d'équations pour le fluide diphasique en tant que tel. C'est un tel système que nous allons écrire. Les difficultés mathématiques posées par la discontinuité des grandeurs physiques au passage des interfaces ont été résolues par l'emploi de la théorie des distributions.

2. Quelques formules de la théorie des distributions [54, 57]

On appelle "distribution" toute fonctionnelle linéaire continue sur l'espace vectoriel $\mathcal{D}$ des fonctions indéfiniment dérivables et à support borné. On distingue les distributions régulières associées aux fonctions localement sommables des distributions singulières (distributions de Dirac).

Nous développons en annexe I quelques notions sur cette théorie et nous nous bornons ici à donner les formules qui seront utiles plus loin.

2.1. Dérivée temporelle d'une distribution $f(\vec{M}, t)$ présentant des discontinuités aux instants $t = t_{In}(\vec{M})$ où $n \in [-\infty, +\infty]$

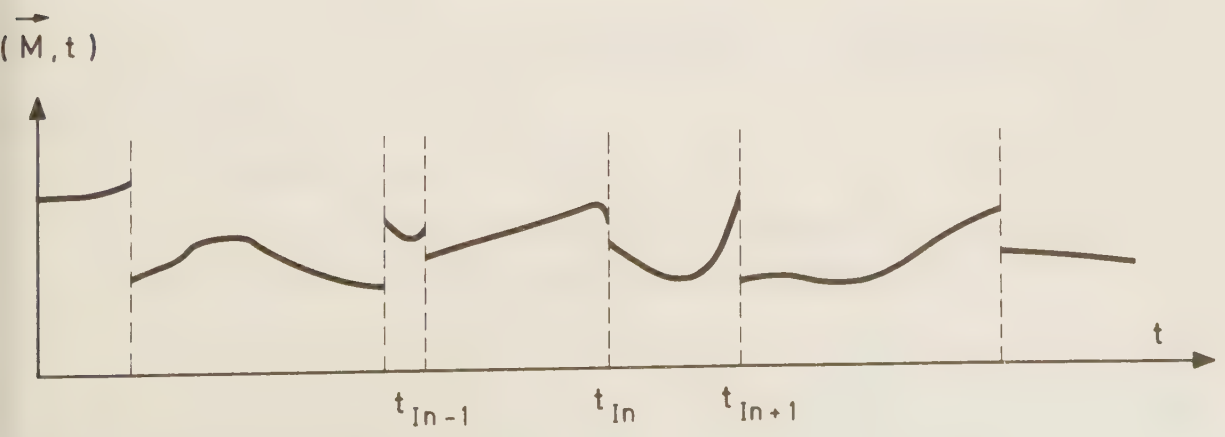


Fig. 1.1

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \left\{\frac{\partial f}{\partial t}\right\} + \sum_{-\infty}^{+\infty} \sigma_f(\vec{M},t) \quad \delta\left[t - t_{In}(\vec{M})\right]$$

$$= \left\{\frac{\partial f}{\partial t}\right\} + \sum_{\text{Interfaces}} (-1)^p \sigma_f(\vec{M},t)\ \vec{V}_I(\vec{M},t) \cdot \vec{n}(\vec{M},t)\ \delta_I$$

où p est pair quand $\vec{n} \cdot \vec{V}_I \leqslant 0$

p est impair quand $\vec{n} \cdot \vec{V}_I \geqslant 0$

$\left\{\frac{\partial f}{\partial t}\right\}$ représente la dérivée de f au sens des fonctions, c'est-à-dire en dehors des discontinuités

$\sigma_f(\vec{M}, t)$ représente le saut de f en $\vec{M}$ à l'instant t

$\sigma_f(\vec{M}, t) = f(\vec{M}, t_+) - f(\vec{M}, t_-)$

$\delta\left[t - t_{In}(\vec{M})\right]$ et δ_I représentent les distributions de Dirac temporelle et spatiale, définies plus précisément en annexe I.

2.2. Dérivée de $f(\vec{M}, t)$ par rapport à une coordonnée spatiale x_i

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \left\{\frac{\partial f}{\partial x_i}\right\} + \sum_{\text{Interfaces}} \sigma_f\ \vec{n} \cdot \vec{x}_i\ \delta_I$$

$$= \left\{\frac{\partial f}{\partial x_i}\right\} + \sum_{-\infty}^{+\infty} (-1)^p\ \sigma_f\ \frac{\vec{n} \cdot \vec{x}_i}{\vec{n} \cdot \vec{V}_I}\ \delta\left[t - t_{In}(M)\right]$$

où p est pair quand $\vec{n} \cdot \vec{V}_I \leqslant 0$

$\sigma_f = f_+(x_i) - f_-(x_i)$

$f_+(x_i)$ étant la valeur de f du côté de la discontinuité vers lequel est orientée la normale $\vec{n}$.

2.3. Produit de convolution

Son utilité apparaîtra au paragraphe III ci-dessous.

On montre que, quand il est défini :

$$f * g(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(u')\ g(u - u')\ du'$$

et que sa dérivée est telle que : $(f * g)' = f' * g = f * g'$

3. Equations locales instantanées d'un écoulement diphasique au sens des distributions

A l'exception de T (Ψ), les fonctions et les produits de fonctions intervenant dans les équations (1-1), (1-2) et (1-3) sont localement sommables et peuvent donc être considérées comme des distributions. La fonction T (Ψ) n'est définie qu'aux interfaces et donne lieu à la distribution singulière $T(\Psi)\,\delta_I$.

Compte tenu :

- des relations de dérivabilité des distributions rappelées en ② ;

- du fait que les phases L et G et les interfaces ont des supports disjoints et complémentaires ;

les équations, au sens des distributions :

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho\Psi + \operatorname{div}\left[\rho\Psi V + i(\Psi)\right] - \rho S(\Psi) + \sum_{\text{Interfaces}} T(\Psi)\,\delta_I = 0 \qquad (1\text{-}4)$$

où Ψ, i(Ψ), S(Ψ) et T(Ψ) ont les valeurs indiquées dans le tableau I, permettent de retrouver les équations (1-1), (1-2) et (1-3) qui expriment dans chaque phase et aux interfaces les principes généraux de conservation.

En outre, les équations (1-4) sont définies en tout point de l'écoulement, à tout instant.

Elles constituent donc un système d'équations traduisant les principes de conservation de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie pour le fluide diphasique.

Muni de ce système d'équations de base, formellement (car il s'agit ici de distributions) analogue au système d'équations aux dérivées partielles générales des fluides monophasiques, le fluide diphasique pourra se voir appliquer les méthodes utilisées dans l'étude de ceux-ci.

II. Equations phasiques locales instantanées

Il est intéressant de connaître l'évolution d'une phase à tout instant et en tout point, donc de déterminer un système d'équations qui représentent pour cette phase les principes généraux de conservation. Pour cela, nous devons connaître, outre les

propriétés physiques de la phase, la distribution qui caractérise son existence en chaque point et à tout instant.

1. Distribution d'existence (ou indicatrice) de phase $X_K(M,t)$

Nous appelons distribution d'existence de phase la distribution $X_K(M,t)$ telle que :

$X_K(M,t) = 1$ si le point M appartient à la phase K à l'instant t

$X_K(M,t) = 0$ dans le cas contraire.

Si $\mathcal{V}$ est un volume entourant le point M et $\mathcal{V}_K(t)$ le volume de la phase K inclu dans $\mathcal{V}$ à l'instant t, on à la relation

$$X_K(M,t) = \lim_{\mathcal{V}\to 0} \frac{1}{\mathcal{V}} \int_{\mathcal{V}_K(t)} dv$$

De même, si T est un intervalle de temps incluant l'instant t, et si T_K est le temps de présence de la phase K en M inclu dans T, on a la relation :

$$X_K(M,t) = \lim_{T\to 0} \frac{1}{T} \int_{T_K(M)} dt$$

$X_K(M,t)$ est une fonction localement sommable. C'est donc une distribution. Elle présente des discontinuités aux instants $t = t_{Ip}(M)$ où se produisent les changements de phase en M. Elle peut s'écrire sous la forme

$$X_K(M,t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \left| H\left(t - t_{I_{2p}}(M)\right) - H\left(t - t_{I_{2p+1}}(M)\right) \right|$$

où H est la fonction d'Heaviside.

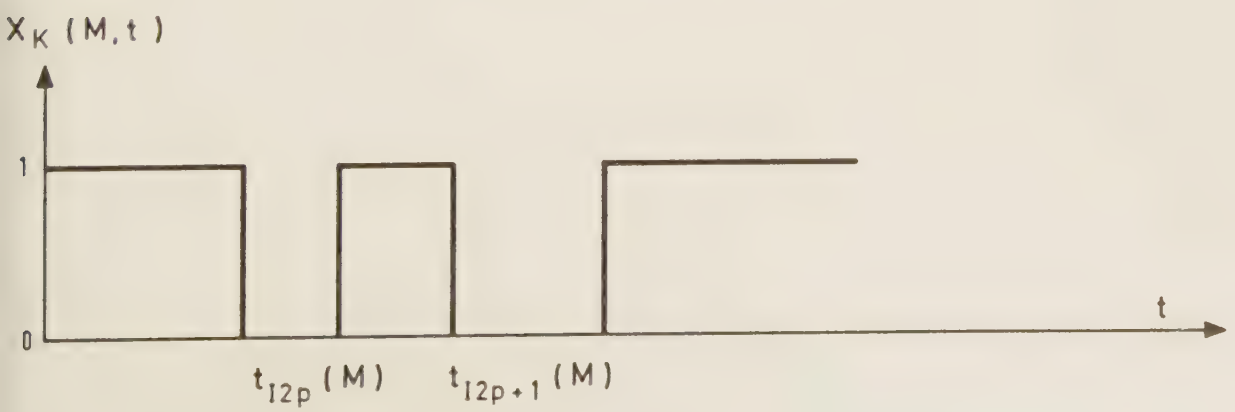


Figure 1.2 : Représentation de $X_K(M,t)$ en fonction du temps.

2. Dérivées de $X_K(M,t)$

2.1. Dérivée par rapport au temps

On obtient immédiatement, en appliquant les formules rappelées dans le paragraphe I ②

$$\frac{\partial X_K}{\partial t} = \sum_{-\infty}^{+\infty} (-1)^p \; \delta\left[t - t_{I_p}(M)\right]$$

2.2. Dérivée spatiale

De la même façon on obtient :

$$\overrightarrow{\text{grad}}\, X_K = \vec{\nabla} X_K = - \sum_{\text{Interfaces}} \vec{n}_K \; \delta_I$$

où la normale $\vec{n}_K$ est orientée vers l'extérieur de la phase K.

$\vec{\nabla} X_K$ peut aussi s'exprimer sous la forme :

$$\vec{\nabla} X_K = \sum_{-\infty}^{+\infty} (-1)^p \left(\frac{\vec{n}}{\vec{n} \cdot \vec{V}_I}\right)_p \; \delta\left[t - t_{I_p}(M)\right]$$

où p est pair quand $\vec{n} . \vec{V}_I \leqslant 0$.

Les portions d'interfaces où le produit scalaire $\vec{n} . \vec{V}_I$ est négatif ou nul seront appelées par convention "interfaces entrantes". Les portions d'interface où $\vec{n} . \vec{V}_I \geqslant 0$ seront appelées "interfaces sortantes". (voir figure 1-3).

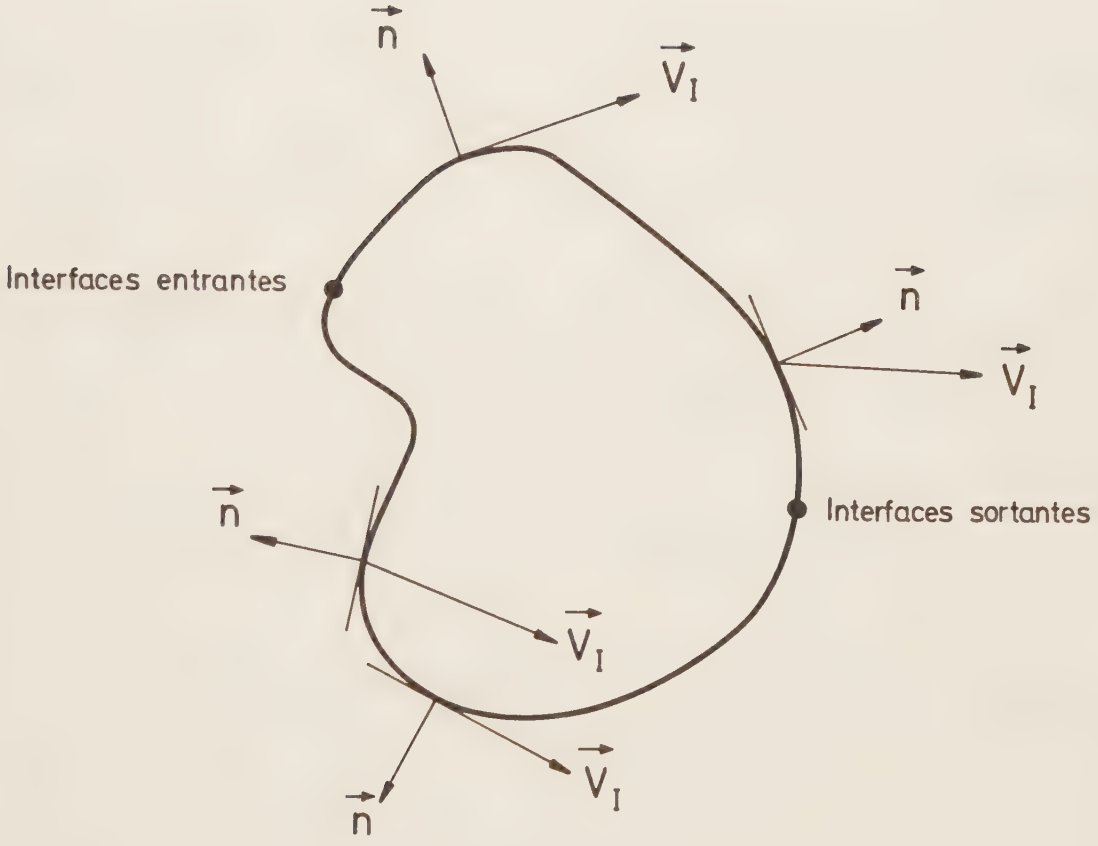

$\vec{n}$
$\vec{V}_I$
Interfaces entrantes
$\vec{n}$
$\vec{V}_I$
$\vec{n}$
Interfaces sortantes
$\vec{V}_I$
$\vec{V}_I$
$\vec{n}$

Fig. 1_3

3. Equations phasiques locales instantanées

Soit f une distribution quelconque, sans singularité à l'intérieur des phases (ce qui est le cas de toutes les fonctions étudiées : vitesses, pressions...).

Nous appelons $f_K = X_K f$ la distribution phasique correspondante. Donc :

$$f_K = \begin{cases} f \text{ dans la phase K} \\ 0 \text{ ailleurs} \end{cases}$$

Représentons symboliquement l'équation (1-4) par l'expression $E(\Psi) = 0$.

Calculons $E(X_K \Psi)$ en utilisant les relations rappelées dans le paragraphe I ② :

(a) $$\frac{\partial X_K \rho \Psi}{\partial t} = \left\{ \frac{\partial X_K \rho \Psi}{\partial t} \right\} + \sum_{\text{Interfaces}} (\rho \Psi)_K \vec{V}_I \cdot \vec{n}_K \, \delta_I$$

(b) $$\operatorname{div} X_K \rho \Psi \vec{V} = \left\{ \operatorname{div} X_K \rho \Psi \vec{V} \right\} - \sum_{\text{Interfaces}} (\rho \Psi \vec{V})_K \cdot \vec{n}_K \, \delta_I$$

(c) $$\operatorname{div} X_K \, i(\Psi) = \left\{ \operatorname{div} X_K \, i(\Psi) \right\} - \sum_{\text{Interfaces}} i(\Psi)_K \cdot \vec{n}_K \, \delta_I$$

(d) $$X_K \rho \, S(\Psi) = \left\{ X_K \rho \, S(\Psi) \right\}$$

Or :

$$\left\{ \frac{\partial X_K \rho \Psi}{\partial t} \right\} + \left\{ \operatorname{div} X_K \rho \Psi \vec{V} \right\} + \left\{ \operatorname{div} X_K \, i(\Psi) \right\} - \left\{ X_K \rho \, S(\Psi) \right\} = 0$$

car c'est l'équation générale relative à la grandeur Ψ à l'intérieur de la phase K.

On en déduit, en sommant les relations (a), (b), (c) et (d), les équations :

$$\frac{\partial}{\partial t} X_K \rho \Psi + \operatorname{div} X_K \rho \Psi \vec{V} + \operatorname{div} X_K \, i\,(\Psi) - X_K \rho \, S\,(\Psi) =$$

$$\sum_{\text{interfaces}} \left[(\rho \Psi)_K \, (\vec{V}_I - \vec{V}_K) - i\,(\Psi)_K \right] \vec{n}_K \, \mathcal{S}_I \qquad (1\text{-}5)$$

qui sont, pour les valeurs respectives de Ψ (voir tableau I) les équations phasiques locales et instantanées de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie.

En sommant sur les deux phases et en remarquant que, au sens des distributions :

$$f = X_K \, f + X_{K'} \, f$$

on obtient :

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho \, \Psi + \operatorname{div} \rho \, \Psi \vec{V} + \operatorname{div} i\,(\Psi) - \rho \, S\,(\Psi) =$$

$$\sum_{K=LG} \sum_{\text{Interfaces}} \left[(\rho \Psi)_K \, (\vec{V}_I - \vec{V}_K) - i\,(\Psi)_K \right] \vec{n}_K \, \mathcal{S}_I$$

En comparant cette équation à l'équation (1-4), nous obtenons :

$$\sum_{\text{Interfaces}} T\,(\Psi) \, \mathcal{S}_I + \sum_{K=L,G} \sum_{\text{Interfaces}} \left[(\rho \Psi)_K \, (\vec{V}_I - \vec{V}_K) - i(\Psi)_K \right] \vec{n}_K \, \mathcal{S}_I = 0$$

qui est l'équation d'interface habituelle (équation (1-3)).

Le deuxième membre de l'équation (1-5) représente les termes de transfert local instantané de la phase K à travers les interfaces.

III. Moyennes temporelles sur un intervalle $\left| t - \frac{T}{2}, \; t + \frac{T}{2} \right|$

Comme nous l'avons vu dans l'introduction, chacune des phases est répartie, dans un écoulement diphasique, de façon plus ou moins régulière selon le type d'écoulement. Chaque paramètre doit donc être considéré comme une fonction aléatoire du temps, que l'on peut caractériser statistiquement.

Comme en écoulement monophasique turbulent, nous devons faire appel à des opérations de moyenne pour étudier de façon générale l'ensemble des écoulements caractérisés par les mêmes conditions

initiales et les mêmes conditions aux frontières.

La méthode la plus générale consiste à utiliser des moyennes statistiques, c'est-à-dire des moyennes sur un ensemble d'expériences identiques. Il est bien connu [58] que, dans le cas d'un écoulement stationnaire (donc, tel que les propriétés statistiques des fonctions aléatoires sont invariantes pour toute translation dans le temps) et, en admettant l'hypothèse de l'ergodisme, la moyenne statistique est égale à la moyenne temporelle sur un intervalle de temps indépendant du temps origine.

L'étude d'un écoulement instationnaire nécessite, soit de conserver la moyenne statistique, ce qui est fort lourd dans la pratique, soit d'utiliser une moyenne temporelle sur un intervalle de temps fonction du temps origine. C'est ce que nous faisons ici. Le cas des écoulements stationnaires est évidemment inclus dans cette étude.

1. Moyenne temporelle d'une distribution f

Par définition, la moyenne temporelle de la distribution f s'écrit :

$$\overline{f}\ (M,t,T) = \frac{1}{T} \int_{t-T/2}^{t+T/2} f(M,u)\ du$$

Plus axiomatiquement, cette moyenne peut s'exprimer au moyen du produit de convolution :

$$\overline{f}\ (M,t,T) = \frac{1}{T}\ \sqcap\!\!\sqcup\left(\frac{t}{T}\right) \delta(M) * f(M,t)$$

où $\frac{1}{T}\ \sqcap\!\!\sqcup\left(\frac{t}{T}\right) \delta\ (M)$ est la distribution "porte" :

$$\sqcap\!\!\sqcup\left(\frac{t}{T}\right) = \begin{cases} 1 & \text{pour } |t| < T/2 \\ 0 & \text{pour } |t| > T/2 \end{cases}$$

Le produit de convolution existe car la distribution $\sqcap\!\!\sqcup\left(\frac{t}{T}\right)$ est bornée (support compact).

Dans le cas où l'écoulement est permanent en moyenne, l'instant d'origine t n'intervient plus à condition que le temps T d'intégration soit assez grand. On se ramène alors à la définition habituelle.

2. Taux de vide

$$\alpha_K(M,t,T) = \overline{X_K(M,t)}$$

$$= \frac{1}{T}\int_{t-T/2}^{t+T/2} X_K(M,t)\,dt$$

$$= \frac{T_K(M,t,T)}{T} = \frac{1}{T}\sum_{N_1(M,t,T)}^{N_2(M,t,T)} \int_{t_{I_{2p}}}^{t_{I_{2p+1}}} dt$$

$$= \frac{1}{T}\sum_{N_1}^{N_2} t_{Kp} = \frac{N_I\,\overline{t_K}}{2T}$$

où $T_K(M,t,T)$ est le temps de passage de la phase K en M dans l'intervalle $\left]t - T/2,\ t + T/2\right[$

$$\left.\begin{aligned} N_1(M,t,T) &= \inf p \\ N_2(M,t,T) &= \sup p \end{aligned}\right\} \quad \text{tels que } t - T/2 \leqslant t_{Ip}(M) \leqslant t + T/2$$

$N_I(M,t,T) = N_2 - N_1$ est le nombre d'interfaces passant en M pendant l'intervalle de temps $\left]t - T/2,\ t + T/2\right[$

$\overline{t_K}$ est la moyenne du temps de passage de la phase K en M.

3. Moyenne phasique d'une distribution f

La moyenne phasique est la moyenne sur le temps d'existence en un point donné de la phase considérée. Elle se définit par :

$$\overline{f}^K = \frac{\overline{X_K\, f}}{\alpha_K}$$

Comme $f = X_G\, f + X_L\, f$ au sens des distributions, nous avons

$$\overline{f} = \alpha_G\, \overline{f}^G + \alpha_L\, \overline{f}^L .$$

Remarque : Dérivation spatiale.

Il est nécessaire de faire attention lorsque l'on dérive la moyenne phasique par rapport à une coordonnée d'espace.

En effet, si, en vertu des propriétés du produit de convo-

lution, (I②), on peut écrire que $\frac{\partial}{\partial x_i}\ \overline{f} = \overline{\frac{\partial f}{\partial x_i}}$, on ne peut par contre pas écrire que $\frac{\partial}{\partial x_i}\ \overline{f}^K = \overline{\frac{\partial f}{\partial x_i}}^K$: la dérivée spatiale de la moyenne phasique d'une distribution f est en général différente de la moyenne phasique de la dérivée d'une distribution f.

En effet :

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\ \overline{f}^K = \frac{\partial}{\partial x_i}\ \frac{\overline{X_K\ f}}{\alpha_K} = \frac{1}{\alpha_K}\ \frac{\partial \overline{X_K\ f}}{\partial x_i} - \frac{1}{\alpha_K^2}\ \overline{X_K\ f}\ \frac{\partial \alpha_K}{\partial x_i}$$

$$= \frac{1}{\alpha_K}\ \overline{\frac{\partial}{\partial x_i}\ X_K\ f}\ -\ \frac{\overline{f}^K}{\alpha_K}\ \frac{\partial \alpha_K}{\partial x_i}$$

$$= \frac{1}{\alpha_K}\ \overline{X_K\ \frac{\partial f}{\partial x_i}} + \frac{1}{\alpha_K}\ \overline{f\ \frac{\partial X_K}{\partial x_i}} - \frac{1}{\alpha_K}\ \overline{f}^K\ \frac{\partial \alpha_K}{\partial x_i}$$

$$= \overline{\frac{\partial f}{\partial x_i}}^K + \frac{1}{\alpha_K}\ \left[\overline{f\ \frac{\partial X_K}{\partial x_i}} - \overline{f}^K\ \frac{\partial \alpha_K}{\partial x_i}\right]$$

Donc si : $\overline{f\ \frac{\partial X_K}{\partial x_i}} \neq \overline{f}^K\ \frac{\partial \alpha_K}{\partial x_i}$, on a : $\frac{\partial \overline{f}^K}{\partial x_i} \neq \overline{\frac{\partial f}{\partial x_i}}^K$

4. Moyenne du terme de transfert interfacial $\overline{f\ \vec{\nabla} X_K}$

Si f est une fonction définie sur l'interface ou une fonction définie à proximité de l'interface et que l'on peut définir par extension sur l'interface, la distribution $f\ \vec{\nabla} X_K$ est une distribution singulière qui peut s'écrire :

$$f\ \vec{\nabla} X_K = f \sum (-1)^p \left(\frac{\vec{n}}{\vec{n}\ .\ \vec{V}_I}\right)_p\ \delta\left[t - t_{Ip}\ (M)\right]$$

$$= \sum (-1)^p \left(\frac{\vec{n}\ .\ f_I}{\vec{n}\ .\ \vec{V}_I}\right)_p\ \delta\left[t - t_{Ip}\ (M)\right]$$

où f_I est la valeur de f sur l'interface.

La moyenne de f $\vec{\nabla} X_K$ s'écrit alors :

$$\overline{f\,\vec{\nabla} X_K} = \frac{1}{T} \sum_{N_1(T)}^{N_2(T)} (-1)^p \left(\frac{\vec{n}\, f_I}{\vec{n} \cdot \vec{V}_I} \right)_p$$

Nous avons appelé "terme de transfert interfacial moyen de la grandeur f" l'expression $\overline{f \vec{\nabla} X_K}$. Cette dénomination se justifiera plus bas.

Ce terme de transfert interfacial moyen se présente sous la forme d'une somme de $N_2(T) - N_1(T)$ termes, forme d'autant moins maniable qu'elle ne fait apparaître aucun des paramètres hydrodynamiques moyens de l'écoulement (vitesses des phases, pressions, taux de vide...). Ainsi, dans le cas particulier où f = 1, nous obtenons

$$\overline{\vec{\nabla} X_K} = \vec{\nabla} \alpha_K = \frac{1}{T} \sum_{N_1}^{N_2} (-1)^p \left(\frac{\vec{n}}{\vec{n} \cdot \vec{V}_I} \right)_p$$

ce qui nous renseigne mal sur l'évolution spatiale du taux de vide.

C'est pourquoi nous avons cherché dans une étude précédente [59] à exploiter les propriétés statistiques d'un ensemble de bulles dans les hypothèses où :

a) il n'y a pas de transfert de masse entre phases ;

b) les dimensions des bulles sont très inférieures aux dimensions du canal.

Nous rappelons en annexe II la méthode utilisée. Nous avons montré que le terme de transfert interfacial moyen d'une grandeur f pouvait être mis sous la forme intégrale suivante :

$$\overline{f \vec{\nabla} X_g} = \frac{\alpha_g}{t_g} t_g \left\{ -\frac{1}{\gamma_g} \int_{\Sigma} f'_I \vec{n}\, d\sigma + \operatorname{div} f_g + \frac{f_g}{|\vec{V}_g|} \vec{k} \left| (\operatorname{div} \vec{V})_g - \operatorname{div} \vec{V}_g \right| \right.$$

$$\left. + \frac{f_g}{|\vec{V}_g|} \vec{k} \wedge \left| \frac{1}{2} \left| (\overrightarrow{\operatorname{rot} V})_g - \overrightarrow{\operatorname{rot} V_g} \right| + \left| \vec{k} \cdot (\bar{\bar{\varepsilon}})_g - \bar{\bar{\varepsilon}}_g \right| \wedge \vec{k} \right| \right\} \qquad (1\text{-}6)$$

dans laquelle :

- $\overline{\overline{A}}$ représente la moyenne d'une grandeur A sur l'ensemble des propriétés statistiques (granulométrie, distribution des vitesses...) des bulles.
- f_g est la moyenne de la grandeur f sur une bulle de volume $\mathcal{V}_g$ et de surface $\sum$: $f_g = \frac{1}{\mathcal{V}_g} \int_{\mathcal{V}_g} f \, dv$
- f'_I est la fluctuation de f par rapport à f_g
- $\vec{V}_g$ est la vitesse moyenne de la bulle, de module $|\vec{V}_g|$ et de vecteur unitaire $\vec{k}$
- $\overline{\overline{\varepsilon}}_g$ est le tenseur moyen des déformations du gaz :

$$\overline{\overline{\varepsilon}}_{g_{ij}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \overline{u_i}^g}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{u_j}^g}{\partial x_i} \right)$$

- $(\overline{\overline{\varepsilon}})_g = \frac{1}{\mathcal{V}_g} \int_{\mathcal{V}_g} \overline{\overline{\varepsilon}} \, dv$ (moyenne du tenseur des déformations sur une bulle)
- $\overline{t_g}$ est le temps de passage moyen des bulles au point d'étude

Les applications de la relation (1-6) nécessitent la connaissance expérimentale des propriétés statistiques des bulles passant au point d'étude.

Dans le cas particulier où toutes les bulles passant au point d'étude ont des caractéristiques sensiblement identiques (émulsion "homogène"), cette relation permet de montrer que :

a) le terme de transfert des forces de pression $\overline{p \vec{\nabla} X_g}$ est égal, en supposant les bulles isobares, à $\overline{p \vec{\nabla} X_g} = \vec{\nabla} \alpha_g \, \overline{p}^g$

b) le terme de transfert aux interfaces du tenseur des contraintes s'écrit :

$$\overline{\overline{\tau} \cdot \vec{\nabla} X_g} = \operatorname{div} \overline{\alpha_g \overline{\overline{\tau}}^g} - \alpha_g \frac{\overline{f}^{G \to L}}{\mathcal{V}_g}$$

où $f_{G \to L}$ est la force exercée par la bulle sur le liquide, qui

peut être mise sous la forme $f_{G \to L} = K_1 \mu_L \left| \bar{V}^g - \bar{V}^L \right|^m (\bar{V}^g - \bar{V}^L) \bar{a}$ ($\bar{a}$: diamètre équivalent de la bulle).

Donc : $$\overline{\bar{\bar{\tau}} \cdot \vec{\nabla} X_g} = \text{div } \alpha_g \overline{\bar{\bar{\tau}}^g} - \frac{\alpha_g K_1 \mu_L \left| \bar{V}^g - \bar{V}^L \right|^m (\bar{V}^g - \bar{V}^L)}{\bar{a}^2}$$

c) les forces dues à la tension superficielle prennent la forme (bulles sphériques de diamètre $\bar{a}$) :

$$\overline{\frac{2\sigma}{a} \vec{\nabla} X_g} = \frac{2 \sigma \alpha_g}{3 \bar{a}} \vec{\nabla} \left| \text{Log } \bar{p}^g \ \alpha_g^3 \right|$$

Pour $\sigma = 25.10^{-3}$, $\alpha_g = 0{,}5$, $\bar{a} = 10^{-4}$ m , $\bar{p}^g = 2.10^5$ Pa ,

$$\frac{\partial \bar{p}^g}{\partial x} = 10^5 \text{ Pa/m} , \quad \frac{\partial \alpha_g}{\partial x} = 0{,}5 \text{ m}^{-1}$$

Les forces dues à la tension superficielle ont pour valeur

$$\overline{\frac{2\sigma}{a} \frac{\partial X_g}{\partial x}} = 250 \text{ Pa/m.}$$

d) la variation spatiale du taux de vide est obtenue en faisant f = 1.

Dans un repère lié à la vitesse moyenne du gaz (coordonnées $\vec{S_1}$, $\vec{S_2}$, $\vec{S_3}$ telles que $\vec{S_1}$ soit parallèle à $\bar{V}^g$), et en posant $\vec{V} = u_i \vec{S_i}$ et $\left|\bar{V}^g\right| = \bar{u}^g$ nous déduisons que :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \alpha_g}{\partial S_1} = \dfrac{\alpha_g}{\bar{u}^g} \left(\overline{\dfrac{\partial u_i}{\partial S_i}}^g - \dfrac{\partial \bar{u}^g}{\partial S_1} \right) \\ \dfrac{\partial \alpha_g}{\partial S_2} = \dfrac{\alpha_g}{\bar{u}^g} \overline{\dfrac{\partial}{\partial S_2} (u_1 - \bar{u}^g)}^g \\ \dfrac{\partial \alpha_g}{\partial S_3} = \dfrac{\alpha_g}{\bar{u}^g} \overline{\dfrac{\partial}{\partial S_3} (u_1 - \bar{u}^g)}^g \end{cases}$$

Or $\overline{\dfrac{\partial}{\partial S_i} (u_1 - \bar{u}^g)}^g$ (où i = 2, 3) est la rotation moyenne de la

bulle que nous supposons de la forme $A_i \, S_i^{\,m} + B_i \frac{\partial \bar{u}^g}{\partial S_i}$ (i = 2,3).

A_i et B_i sont des coefficients fonctions de S_1.

Le terme $B_i \frac{\partial \bar{u}^g}{\partial S_i}$ tient compte de la rotation induite par un gradient radial de vitesse moyenne. Le terme $A_i \, S_i^{\,m}$ est la rotation propre de la bulle : cette forme est imposée par des considérations de symétrie de l'écoulement moyen (m positif ou nul, impair) on en déduit les profils nécessaires de taux de vide, schématisés sur la figure (1-4)

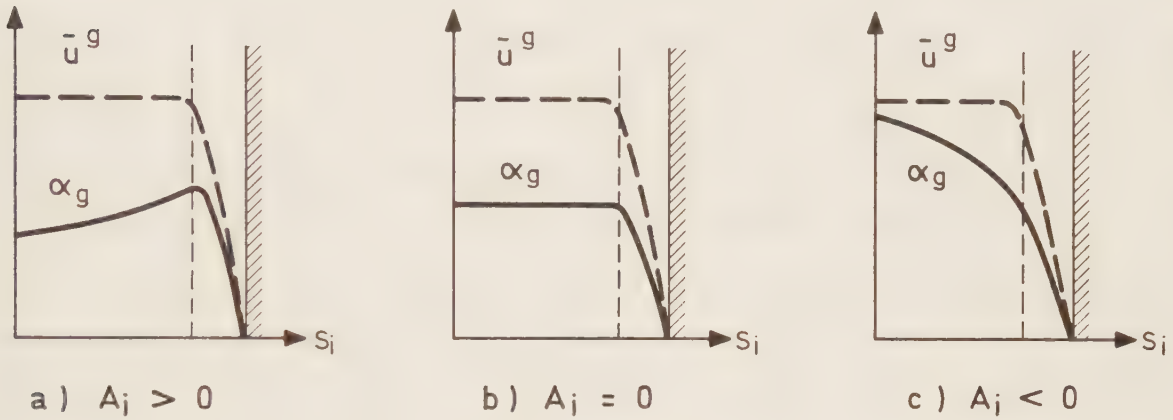


Fig. 1.4 _ Profils de $\bar{u}^g$ et de α_g

Certains expérimentateurs [60] ont déterminé des profils de taux de vide de cette forme. A_i étant une fonctionde de S_1, rien n'empêche le profil d'évoluer pour passer de la forme schématisée en a) à la forme schématisée en c)

5. Moyenne des équations générales

Moyennons temporellement les équations (1-4). Etant donné les propriétés du produit de convolution, on obtient directement:

$$\frac{\partial}{\partial t} \overline{\rho \psi} + \operatorname{div} \overline{\rho \psi \vec{V}} + \operatorname{div} \overline{i(\psi)} - \overline{\rho S(\psi)} + \sum_{\text{Interfaces}} \overline{T(\psi) \, \mathcal{E}_I} = 0 \quad (1\text{-}7)$$

Le terme $\overline{\sum_{\text{Interfaces}} T(\psi) \, \mathcal{E}_I}$ est un cas particulier de $\overline{f \vec{\nabla} X_K}$

étudié au paragraphe précédent. La grandeur f est dans ce cas égale à $T(\psi)$. Le calcul d'ordre de grandeur que nous avons donné montre que l'on pourra souvent le négliger. Néanmoins, pour la généralité du calcul, nous en tiendrons compte dans l'expression des lois de paroi et

de vitesse déficitaire déterminées au chapitre 2.

6. Moyenne des équations phasiques

Moyennons temporellement les équations (1-5) on obtient directement :

$$\frac{\partial}{\partial t}\,\alpha_K\,\overline{\rho\Psi}^K + \operatorname{div}\,\alpha_K\,\overline{\rho\Psi\vec{V}}^K + \operatorname{div}\,\alpha_K\,\overline{i(\Psi)}^K - \alpha_K\,\overline{\rho S(\Psi)}^K$$

$$= \sum_{\text{Interfaces}} \overline{\left[\rho_K\,\Psi_K\,(\vec{V}_I - \vec{V}_K) - i\,(\Psi)_K\right]\cdot\vec{n}_K\,\delta_I} \qquad (1\text{-}8)$$

Le second membre de cette équation représente le transfert moyen de la masse, de la quantité de mouvement ou de l'énergie selon la valeur de Ψ (tableau I). On peut le mettre sous la forme $\overline{f\vec{\nabla}X_K}$ où f est une fonction de Ψ . Ceci justifie la dénomination de "terme de transfert interfacial moyen" donné de façon générale à l'expression $\overline{f\vec{\nabla}X_K}$ où f est une grandeur quelconque.

Nous avons explicité dans le § 4 la valeur des termes de transfert interfacial de la pression et du tenseur des contraintes dans le cas d'une émulsion "homogène", pour un écoulement sans transfert de masse, à petites bulles.

IV. Tenseur moyen des contraintes

Une application importante de l'écriture sous forme de distributions des variables intervenant dans l'étude des écoulements à deux phases, est l'expression que l'on peut donner au tenseur moyen des contraintes visqueuses.

1. Expression

Les deux fluides étant newtoniens, la forme du déviateur des contraintes à l'intérieur de chaque phase est bien connue : dans un repère orthonormé direct, il s'écrit :

$$\tau_{ij} = -\frac{2}{3}\,\mu\left(\frac{\partial u_k}{\partial x_k}\right)\delta_{ij} + \mu\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)$$

où $\dfrac{\partial u_k}{\partial x_k} = \operatorname{div}\vec{V}$, en utilisant la convention d'Einstein, et δ_{ij} est le symbole de Kronecker égal à 1 si i = j et à 0 si i ≠ j.

Nous supposerons que les viscosités du gaz et du liquide sont constantes.

Nous avons alors :

$$\tau_{ij} = -\frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial x_k} (\mu u_k) \delta_{ij} + \left(\frac{\partial \mu u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \mu u_j}{\partial x_i} \right)$$

Cette expression étant valable dans chacune des deux phases, elle est valable partout au sens des distributions.

Le tenseur moyen en un point M est donc, compte tenu des propriétés du produit de convolution, égal à :

$$\overline{\tau_{ij}} = -\frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial x_k} \overline{\mu u_k} \delta_{ij} + \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \overline{\mu u_i} + \frac{\partial}{\partial x_i} \overline{\mu u_j} \right) \qquad (1\text{-}9)$$

Exprimons cette relation en fonction des moyennes phasiques des vitesses, des viscosités de chacune des phases et du taux de vide.

On sait que $\overline{\mu u_i} = \alpha \mu_G \overline{u_i}^G + (1 - \alpha) \mu_L \overline{u_i}^L$

en posant $\alpha = \alpha_G$.

On a donc :

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \overline{\mu u_i} = \alpha \mu_G \frac{\partial \overline{u_i}^G}{\partial x_j} + (1-\alpha) \mu_L \frac{\partial \overline{u_i}^L}{\partial x_j} + \left[\mu_G \overline{u_i}^G - \mu_L \overline{u_i}^L \right] \frac{\partial \alpha}{\partial x_j}$$

Calculons $\frac{\partial}{\partial x_k} \overline{\mu u_k}$

$$\frac{\partial}{\partial x_k} \overline{\mu u_k} = \mu_G \frac{\partial}{\partial x_k} \alpha \overline{u_k}^G + \mu_L \frac{\partial}{\partial x_k} (1 - \alpha) \overline{u_k}^L$$

Or l'équation de continuité s'écrit :

$$\frac{\partial}{\partial x_k} \alpha \overline{\rho u_k}^G + \rho_L \frac{\partial}{\partial x_k} (1 - \alpha) \overline{u_k}^L = 0$$

Donc : $\frac{\partial}{\partial x_k} \overline{\mu u_k} = \mu_g \frac{\partial}{\partial x_k} \alpha \overline{u_k}^G - \frac{\mu_L}{\rho_L} \frac{\partial}{\partial x_k} \alpha \overline{\rho u_k}^G$

Nous n'étudierons par la suite que les écoulements sans transfert de masse.

On a alors : $\frac{\partial}{\partial x_k} \alpha \overline{\rho u_k}^G = \frac{\partial}{\partial x_k} (1 - \alpha) \overline{u_k}^L = 0$

Donc $\frac{\partial}{\partial x_k} \overline{\mu\ u_k} = \mu_G \frac{\partial}{\partial x_k} \alpha \bar{u}_k^G$

Le déviateur moyen des contraintes s'écrit donc :

$$\overline{\tau_{ij}} = -\frac{2}{3} \mu_G \left(\frac{\partial}{\partial x_k} \alpha \overline{u_k}^G \right) \delta_{ij} + \alpha \mu_G \left[\frac{\partial \overline{u_i}^G}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{u_j}^G}{\partial x_i} \right] + (1 - \alpha) \mu_L$$

$$\left[\frac{\partial \overline{u_i}^L}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{u_j}^L}{\partial x_i} \right] + \left(\mu_G \overline{u_i}^G - \mu_L \overline{u_i}^L \right) \frac{\partial \alpha}{\partial x_j} + \left(\mu_G \overline{u_i}^G - \mu_L \overline{u_i}^L \right) \frac{\partial \alpha}{\partial x_i} \quad (1\text{-}10)$$

2. Cas d'un écoulement localement homogène

Dans ce cas, les moyennes phasiques des composantes homolcgues de la vitesse sont, par définition égales : $\overline{u_i}^G = \overline{u_i}^L = \overline{u_i}$

L'expression (1-10) se ramène alors à :

$$\overline{\tau_{ij}} = -\frac{2}{3} \mu_G \left| \frac{\partial}{\partial x_K} \alpha \bar{u}_K \right| \delta_{ij} + \bar{\mu} \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) + (\mu_G - \mu_L) \left| \bar{u}_i \frac{\partial \alpha}{\partial x_j} + \bar{u}_j \frac{\partial \alpha}{\partial x_i} \right|$$

où $\bar{\mu} = \alpha \mu_G + (1 - \alpha) \mu_L$

Tensoriellement, cette expression s'écrit :

$$\overline{\overline{\tau}} = -\frac{2}{3} \mu_G \left| \operatorname{div} \alpha \vec{\bar{v}} \right| \bar{\bar{U}} + \bar{\mu} \cdot \overline{\overline{\varepsilon}} + (\mu_G - \mu_L) \left(\vec{\bar{v}} \otimes \vec{\nabla} \alpha \right)$$

où le signe $\otimes$ représente un produit tensoriel.

Nous remarquons donc que, même dans le cas d'un écoulement localement homogène, on ne peut pas considérer que l'écoulement diphasique soit en moyenne newtonien, sauf dans les cas particuliers suivants :

2-1 : $|\mu_G - \mu_L| \left| \vec{\bar{v}} \otimes \vec{\nabla} \alpha \right| \ll \bar{\mu} \left| \overline{\overline{\varepsilon}} \right|$

Dans ce cas, l'écoulement diphasique est newtonien de viscosité $\bar{\mu} = \alpha \mu_G + (1 - \alpha) \mu_L$

2-2 : $\overline{\vec{v}} \circledast \vec{\nabla} \alpha = \lambda \, \overline{\overline{\varepsilon}}$ avec $\frac{\partial \lambda}{\partial \overline{\overline{\varepsilon}}} = 0$

On a alors :

$$\overline{\overline{\tau}} = -\frac{2}{3}\mu_G \left| \operatorname{div} \alpha \overline{\vec{v}} \right| \overline{\overline{U}} + \left[\bar{\mu} + \lambda (\mu_G - \mu_L) \right] \overline{\overline{\varepsilon}}$$

Le fluide diphasique est alors newtonien de viscosité :

$$\tilde{\mu} = \bar{\mu} + \lambda (\mu_g - \mu_L) = (\alpha + \lambda) \mu_g + (1 - \alpha - \lambda) \mu_L$$

3. Viscosité équivalente

Dans le cas d'un écoulement localement homogène, de nombreux auteurs (voir introduction) ont tenté d'assimiler l'émulsion à un fluide monophasique équivalent.

La viscosité de ce fluide (ou "viscosité équivalente") est définie, au travers de la fonction de dissipation moyenne, par l'identité :

$$\overline{\phi} = \overline{\overline{\tau} : \overline{\varepsilon}} = \mu_{eq} \, \overline{\overline{\varepsilon}} : \overline{\overline{\varepsilon}}$$

Dans l'équation des quantités de mouvement cette définition n'est pas applicable, contrairement à ce qui se passe en écoulement monophasique où aucune opération de moyenne n'est nécessaire pour la définition de la viscosité.

Il faut donc définir, quand c'est possible, une viscosité équivalente qui soit utilisable dans l'équation des quantités de mouvement.

Or, nous venons de montrer que, dans le cas particulier où $\overline{\vec{v}} \circledast \vec{\nabla} \alpha = \lambda \, \overline{\overline{\varepsilon}}$ avec $\frac{\partial \lambda}{\partial \overline{\overline{\varepsilon}}} = 0$, le tenseur moyen des contraintes se met sous la forme $\overline{\overline{\tau}} = \tilde{\mu} \, \overline{\overline{\varepsilon}}$. Ceci définit bien une viscosité équivalente utilisable dans l'équation des quantités de mouvement.

On a donc : $\overline{\phi} = \frac{\mu_{eq}}{\tilde{\mu}} \, \overline{\overline{\tau}} : \overline{\overline{\varepsilon}}$ et la relation entre les deux viscosités équivalentes est la suivante : $\frac{\mu_{eq}}{\tilde{\mu}} = \frac{\overline{\overline{\tau}} : \overline{\overline{\varepsilon}}}{\overline{\overline{\tau}} : \overline{\overline{\varepsilon}}}$

Dans le cas où $\overline{\overline{\tau} : \overline{\varepsilon}} = \overline{\overline{\tau}} : \overline{\overline{\varepsilon}}$, on a alors $\mu_{eq} = \tilde{\mu}$. Ce cas correspond à un écoulement dans lequel les bulles ne perturbent pas les lignes de courant du fluide : ce n'est possible que s'il n'y a pas de bulles donc dans le cas d'un fluide monophasique.

4. Cas d'un écoulement avec glissement local constant

Dans ce cas $\bar{u}_i^G = \bar{u}_i^L + u_{i\infty}$ où $\frac{\partial}{\partial x_j} u_{i\infty} = 0$

L'expression (1-9) se met alors sous la forme :

$$\overline{\tau_{ij}} = -\mu_G \left[\frac{\partial}{\partial x_K} \alpha \bar{u}_K^L + u_{K\infty} \frac{\partial \alpha}{\partial x_K} \right] \delta_{ij} + \bar{\mu} \left(\frac{\partial \bar{u}_i^L}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j^L}{\partial x_i} \right)$$

$$+ (\mu_G - \mu_L) \left(\bar{u}_i^L \frac{\partial \alpha}{\partial x_j} + \bar{u}_j^L \frac{\partial \alpha}{\partial x_i} \right) + \mu_G \left(u_{i\infty} \frac{\partial \alpha}{\partial x_j} + u_{j\infty} \frac{\partial \alpha}{\partial x_i} \right)$$

CHAPITRE 2

ECOULEMENT TURBULENT D'UNE EMULSION DANS UN CANAL DE SECTION CONSTANTE (PROBLEME DYNAMIQUE)

I. Introduction

Nous avons indiqué dans le chapitre 1 que l'écriture au sens des distributions des équations de conservation des écoulements diphasiques permettait d'appliquer à ces écoulements des méthodes d'étude analogues à celles qui sont utilisées pour les écoulements monophasiques. Ce chapitre a pour but d'en donner un exemple.

Nous allons appliquer au cas d'une émulsion (c'est-à-dire d'un écoulement diphasique où le liquide est la phase continue) la méthode asymptotique utilisée par A. FORTIER [52] en écoulement turbulent monophasique pour déterminer les profils de vitesse moyenne, les coefficients de frottement et les pertes de pression dans un canal de section constante. Cette méthode présente l'avantage de n'imposer aucune relation fonctionnelle entre le tenseur des contraintes turbulentes (tensions de Reynolds) et le champ des vitesses moyennes et de leurs dérivées. Elle évite en écoulement diphasique l'usage d'une ou de plusieurs longueurs de mélange dont nous avons vu plus haut l'usage qui en est fait, sans justification satisfaisante, dans plusieurs modèles.

Nous allons voir qu'elle permet de déterminer la forme des profils des vitesses moyennes, des débits massiques par unité de surface des deux phases et du coefficient de frottement que nous définirons de façon analogue à celui qui est utilisé en écoulement simple-phase.

Le choix de l'étude d'un canal de section constante répond aux motivations suivantes :

a) Dans un domaine aussi complexe que celui des écoulements à deux phases, seules des conditions aux limites simples permettent de faire aboutir des calculs sans hypothèses excessives.

Une telle configuration de canal présente par ailleurs un intérêt pratique dans la résolution de problèmes tels que :

- la remontée des produits pétroliers (mélanges d'huiles et de gaz naturel) dans les canalisations attachées aux puits.

- le pompage de liquides corrosifs par le procédé de "gaz-lift".

- le pompage de mélanges liquide-solide appliqué au dragage de sables, graviers ou nodules polymétalliques. Les études concernant ce pompage nécessitent une connaissance parfaite des mécanismes de l'"air-lift".

b) L'étude théorique d'écoulements dans des géométries plus complexes ne peut se faire que lorsque les paramètres intervenant dans un canal de géométrie simple sont bien connus. Vouloir d'emblée écrire un modèle simple pour rendre compte de certains résultats d'expérience risque en effet de ne conduire qu'à un modèle simpliste qu'il sera difficile d'extrapoler à d'autres expériences.

II. Hypothèses

a) Le canal d'étude est un canal cylindrique de section rectangulaire allongée, de largeur 2e, faisant un angle φ avec la verticale.

Le système de coordonnées est indiqué sur la figure 2-1 :

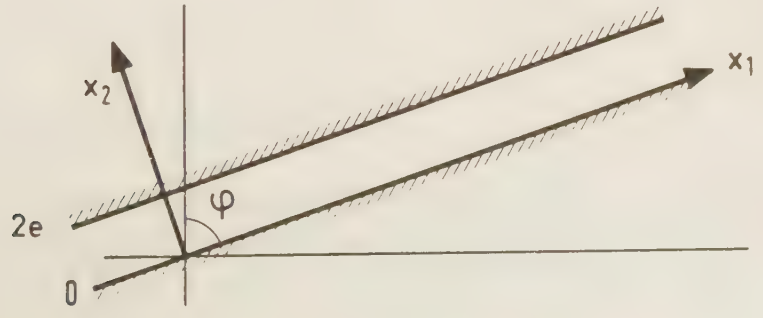


Fig. 2.1

Nous supposerons l'écoulement bidimensionnel. Donc $\frac{\partial \overline{f}}{\partial x_3} \equiv 0$ quelque soit $\overline{f}$, x_3 étant la coordonnée normale au plan (x_1, x_2). La vitesse sera repérée par ses coordonnées u et v selon les axes Ox_1 et Ox_2 respectivement.

b) L'écoulement est supposé stationnaire en moyenne, donc $\frac{\partial \overline{f}}{\partial t} \equiv 0$ quelque soit f.

c) L'écoulement est supposé isotherme, de température T.

d) Le gaz est supposé parfait. Il obéit donc à la relation d'état $p = \rho r T$.

e) Nous négligeons les transferts de masse entre phases : il n'y a ni vaporisation, ni condensation, ni absorption d'une phase par l'autre. Il n'y a pas de transformation chimique. Ce cas s'applique donc, en première approximation à des mélanges d'eau et d'air.

f) En chaque point les pressions moyennes dans le gaz et le liquide sont supposées égales : $\overline{p}^g = \overline{p}^L = \overline{p}$

g) Les forces dues à la tension superficielle sont négligeables devant les forces de pression, d'inertie et de gravité :

$$\overline{\sum_{\text{Interfaces}}} \; T\,(\psi)\,\delta_I \neq 0$$

Le calcul d'ordre de grandeur effectué dans le chapitre 1 justifie cette hypothèse.

h) La moyenne de la composante transversale de la vitesse est nulle, donc $\overline{v} \equiv 0$. Cette hypothèse est justifiée dans le cas d'un écoulement à grande vitesse débitante ($\gtrsim$ 5 m/s).

Nous serons amenés à faire d'autres hypothèses que nous signalerons en cours de calcul.

III. Définition du glissement local

Nous définissons des glissements locaux γ_G et γ_L du gaz et du liquide par rapport à la vitesse moyenne du mélange $\overline{u} = \alpha \overline{u}^g + (1 - \alpha)\,\overline{u}^L$, en posant :

$$\overline{u}^{g} = \overline{u} + \gamma_g$$

$$\overline{u}^{L} = \overline{u} + \gamma_L$$

γ_g et γ_L sont liés par la relation

$$\alpha \gamma_g + (1 - \alpha)\ \gamma_L = 0$$

et on en déduit que $\gamma_g = (1 - \alpha)\ (\overline{u}^{g} - \overline{u}^{L})$

$$\gamma_L = \alpha\ (\overline{u}^{L} - \overline{u}^{g})$$

Nous appellerons glissement local G la quantité

$$G = \alpha\ \gamma_g = -\ (1 - \alpha)\ \gamma_L = \alpha(1 - \alpha)\ (\overline{u}^{g} - \overline{u}^{L})$$

Cette quantité, bien que différente des glissements habituellement choisis $\left(\overline{u}^{g} - \overline{u}^{L}\right.$ ou $\left.\frac{\overline{u}^{g}}{\overline{u}^{L}}\right)$ apparaîtra naturellement dans les équations. Le cas particulier de l'écoulement homogène sera obtenu en faisant G = 0, ainsi que toutes ses dérivées.

IV. Equations du problème

Nous reprenons ci-dessous les équations de conservation de la masse et de la quantité de mouvement établies dans le chapitre 1, que nous réécrivons en tenant compte des hypothèses faites ci-dessus. Notre but est d'aboutir à une expression de la perte de pression moyennée sur la section de passage de l'écoulement dans le canal considéré. Pour ce faire, il sera nécessaire de déterminer les profils des vitesses moyennes et la contrainte tangentielle à la paroi (§ VI et VII).

1. Equations de conservation de la masse

L'équation diphasique de conservation de la masse s'écrit :

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\ \overline{\rho u} = 0\ ,\ \text{d'où}\quad \overline{\rho u} = m\ (x_2)$$

Or $\overline{\rho u} = \alpha \rho_g\ \overline{u}^{g} + (1 - \alpha)\ \rho_L\ \overline{u}^{L} = \overline{\rho}\ \overline{u} + (\rho_g - \rho_L)\ G$

Nous supposerons : Hypothèse i) : $\rho_g \ll \rho_L$

On en déduit : $\overline{\rho u} = \overline{\rho}\ \overline{u} - \rho_L\ G = m(x_2)$ (2-1)

Dans la mesure où nous avons supposé qu'il n'y a pas de transfert de masse entre phases, nous avons imposé une contrainte qui se traduit par l'écriture de l'équation de continuité de l'une des phases, par exemple du liquide :

$$\frac{\partial}{\partial x_1} (1 - \alpha) \rho_L \bar{u}^L = 0$$

D'où $(1 - \alpha) \rho_L \bar{u}^L = m_L (x_2)$

Or $(1 - \alpha) \bar{u}^L = (1 - \alpha) \bar{u} - G$

Nous avons donc :

$$(1 - \alpha) \rho_L \bar{u} - \rho_L G = m_L (x_2) \qquad (2\text{-}2)$$

Nous en déduisons l'équation de continuité du gaz :

$$\alpha \bar{p} \bar{u}^g = r T m_g (x_2)$$

D'où $$\alpha \bar{p} \bar{u} + \bar{p} G = r T m_g (x_2) \qquad (2\text{-}3)$$

$m(x_2)$, $m_L(x_2)$, $m_g(x_2)$ représentent des débits massiques locaux par unité de surface.

Des relations (2-2) et (2-3) nous tirons, en éliminant α et G, la relation :

$$\boxed{\bar{u} = \frac{m_L (x_2)}{\rho_L} + \frac{r T m_g (x_2)}{\bar{p}}} \qquad (2\text{-}4)$$

qui lie la vitesse moyenne à la pression moyenne dans chaque section d'abscisse x_1.

En dérivant cette relation par rapport à x_1 nous déduisons :

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial x_1} = - \frac{r T m_g (x_2)}{\bar{p}^2} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_1} \qquad (2\text{-}5)$$

formule dont nous verrons l'importance au paragraphe V.

L'écoulement liquide limite, quand la quantité de gaz tend vers zéro ($m_g (x_2) = 0$ quelque soit x_2), est établi : $\partial \bar{u}/\partial x_1 = 0$.

2. Equations des quantités de mouvement

Soit f' la fluctuation d'une grandeur f quelconque par rapport à sa valeur moyenne $\bar{f}$: $f = \bar{f} + f'$.

Nous ne distinguerons pas les fluctuations dues à la turbulence des fluctuations dues à la coexistence des deux phases.

Lorsqu'un produit de plusieurs grandeurs f, g et h interviendra, nous utiliserons la forme contractée suivante :

$\overline{f\ g\ h} = \overline{f}\ \overline{g}\ \overline{h} + \overline{(f\ g\ h)'}$ en remarquant bien que

$\overline{(f\ g\ h)'} = \overline{f}\ \overline{g'\ h'} + \overline{g}\ \overline{f'\ h'} + \overline{h}\ \overline{f'\ g'} + \overline{f'\ g'\ h'}$

Ceci permet d'alléger les notations.

L'hypothèse h) $\overline{v} \equiv 0$ nous permet d'écrire que

$$\overline{\rho\ u\ V} = \overline{(\rho\ u\ V)'} \quad \text{et} \quad \overline{\rho v^2} = \overline{(\rho\ v^2)'}$$

Nous ferons les hypothèses supplémentaires suivantes :

Hypothèse j) : $\overline{(\rho\ u)'\ u'} \ll \overline{\rho u}\ .\ \overline{u}$

Hypothèse k) : $\frac{\partial}{\partial x_1}\ \overline{(\rho\ u)'\ u'} \ll \frac{\partial}{\partial x_1}\ \overline{\rho u}\ .\ \overline{u}$

L'hypothèse j) se justifie en admettant que les résultats concernant les fluctuations de vitesse dans les écoulements monophasiques sont encore valables ici.

Or $\overline{(\rho\ u)'\ u'} < \rho_L\ \overline{u'^2}$

et d'après [61] : $\sqrt{\overline{u'^2_+}} < 3$

u'_+ étant la fluctuation adimensionnelle de la composante axiale u de la vitesse rapportée à la vitesse de frottement à la paroi u_*.

Nous admettrons que $u_* \simeq \mathcal{U}/25$ ($\mathcal{U}$ = vitesse débitante).

Pour une vitesse débitante de 25 m/s

$$\overline{(\rho\ u)'\ u'} < 9\ \rho_L\ \frac{\mathcal{U}_L^2}{625} \ll \rho_L\ \mathcal{U}_L^2 \ \# \ \overline{\rho u}\ .\ \overline{u}$$

L'hypothèse j) revient à écrire que la moyenne temporelle de la quantité de mouvement est prise égale au produit de la vitesse moyenne par le débit moyen locaux : $\overline{\rho u^2} = \overline{\rho u}\ .\ \overline{u}$

L'hypothèse k) revient à supposer que le rapport entre fluctuations et valeurs moyennes $\frac{\overline{(\rho u)'\ u'}}{\overline{\rho u}\ .\ \overline{u}}$ est indépendant de la coordonnée axiale x_1.

En outre, nous supposerons que :

Hypothèse l) : $\frac{\partial}{\partial x_1}\ \overline{\mu\ u} \ll \overline{p}$

En effet : $\frac{\partial}{\partial x_1}\ \overline{\mu\ u} \leqslant \mu_L\ \frac{\partial\ \overline{u}}{\partial x_1}$

Pour $\bar{p} = 10^5$ Pa, l'égalité $\bar{p} = \frac{\partial}{\partial x_1} \overline{\mu u}$ imposerait une accélération de l'ordre de 10^8 m.s^{-2} ce qui est impensable. Ce calcul d'ordre de grandeur justifie donc l'hypothèse 1).

Compte tenu de l'ensemble des hypothèses faites ci-dessus, l'équation (1-7) (chapitre 1 § III-5), - dans laquelle Ψ représente la vitesse, $i(\Psi)$ le tenseur des contraintes (le déviateur moyen des contraintes prenant la forme mise en évidence dans la relation (1-9), où l'on néglige le terme $\frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial x_K} \overline{\mu u_K} \delta_{ij}$) et $S(\Psi)$ les forces de pesanteur -, prend les formes scalaires suivantes :

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\left[\bar{p} + \overline{\rho u} \cdot \bar{u}\right] + \frac{\partial}{\partial x_2}\left[\overline{(\rho u v)'} - \frac{\partial}{\partial x_2}\overline{\mu u}\right] + \bar{\rho} g \cos\varphi = 0 \qquad (2\text{-}6)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_2}\left[\bar{p} + \overline{(\rho v^2)'}\right] + \frac{\partial}{\partial x_1}\left[\overline{(\rho u v)'} - \frac{\partial}{\partial x_2}\overline{\mu u}\right] + \bar{\rho} g \sin\varphi = 0 \qquad (2\text{-}7)$$

Or $\overline{\mu u} = \alpha \mu_g \bar{u}^g + (1-\alpha)\mu_L \bar{u}^L = \bar{\mu}\bar{u} - \mu_L G$

en supposant : Hypothèse m) : $\mu_g << \mu_L$

Posons : $\bar{\tau} = \frac{\partial}{\partial x_2}\bar{\mu}\bar{u} - \overline{(\rho u v)'}$

$\bar{\tau}$ est la contrainte tangentielle moyenne sur un élément de surface perpendiculaire à O x_2, à l'ordonnée x_2.

Compte tenu de la relation (2-5) les équations (2-6) et (2-7) peuvent alors s'écrire :

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial x_1}\left[1 - \frac{r\, T\, m(x_2)\, m_g(x_2)}{\bar{p}^2}\right] - \frac{\partial \bar{\tau}}{\partial x_2} + \mu_L \frac{\partial^2 G}{\partial x_2^2} + \bar{\rho} g \cos\varphi = 0 \qquad (2\text{-}8)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_2}\left|\bar{p} + (\overline{\rho v^2})'\right| - \frac{\partial \tau}{\partial x_1} + \mu_L \frac{\partial^2 G}{\partial x_1 \partial x_2} + \bar{\rho} g \sin\varphi = 0 \qquad (2\text{-}9)$$

V. Contrainte tangentielle à la paroi

Nous supposons que la seule phase présente à la paroi est le liquide, hypothèse vérifiée expérimentalement dans le cas des émulsions :

donc $\alpha_{x_2 = 0} = 0$

1. Nous allons d'abord montrer que la forme de la contrainte tangentielle à la paroi est $\bar{\tau}_o = \mu_L \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial x_2}\right)_{x_2=0}$

A la paroi définie par $x_2 = 0$, la contrainte tangentielle s'écrit

$$\bar{\tau}_o = \left(\frac{\partial}{\partial x_2} \bar{\mu}\ \bar{u}\right)_{x_2=0} = \left[\bar{\mu} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x_2}\right]_{x_2=0} + \left(\bar{u} \frac{\partial \bar{\mu}}{\partial x_2}\right)_{x_2=0}$$

Or $\bar{\mu}_{x_2=0} = \alpha_{x_2=0}\ \mu_g + \left(1 - \alpha_{x_2=0}\right) \mu_L = \mu_L$

$$\left(\bar{u} \frac{\partial \bar{\mu}}{\partial x_2}\right)_{x_2=0} = (\mu_g - \mu_L) \left(\bar{u} \frac{\partial \alpha}{\partial x_2}\right)_{x_2=0}$$

Il nous faut évaluer $\left(\bar{u} \frac{\partial \alpha}{\partial x_2}\right)_{x_2=0}$ en remarquant que à la paroi

$\bar{u}_{x_2=0} = 0$ (condition d'adhérence à la paroi)

a) Si $\left(\frac{\partial \alpha}{\partial x_2}\right)_{x_2=0}$ n'est pas infini, $\left(\bar{u} \frac{\partial \alpha}{\partial x_2}\right)_{x_2=0} = 0$

b) Si $\left(\frac{\partial \alpha}{\partial x_2}\right)_{x_2=0}$ est infini, cela signifie que, au voisinage de $x_2 = 0$, le taux de vide est nécessairement de la forme $\alpha = k\ x_2^{1-n}$ où n est compris strictement entre 0 et 1. En effet $n > 1$ (ou $\alpha = k \text{ Log } x_2$) entraînerait un taux de vide infini à la paroi ce qui n'a pas de sens physique. Les cas $n = 0$ et $n = 1$ entraînent que α est constant au voisinage de $x_2 = 0$, constante qui ne peut être que zéro : dans ce cas, $\left(\frac{\partial \alpha}{\partial x_2}\right)_{x_2=0}$ est nul, donc non infini, ce qui nous ramène au cas a) ci-dessus.

Nous admettrons que $\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial x_2}\right)_{x_2=0}$ n'est ni infini, ni nul, ce qui impose à la vitesse moyenne la forme $\bar{u} = a\ x_2$ au voisinage de $x_2 = 0$.

Nous avons donc :

$$\left(\bar{u}\,\frac{\partial \alpha}{\partial x_2}\right)_{x_2=0} = \left(\frac{\partial \alpha \bar{u}}{\partial x_2}\right)_{x_2=0} - \left(\alpha\,\frac{\partial \bar{u}}{\partial x_2}\right)_{x_2=0} = \left(\frac{\partial \alpha \bar{u}}{\partial x_2}\right)_{x_2=0}$$

$$= \left[\frac{\partial}{\partial x_2}\, a\, k\, x_2^{2-n}\right]_{x_2=0} = (2-n)\, a\, k\, x_2^{1-n} = 0$$

Nous déduisons des cas a) et b) que la forme de la contrainte tangentielle à la paroi est :

$$\boxed{\bar{\tau}_o = \mu_L \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial x_2}\right)_{x_2=0}}$$

2. Des relations (2-3) et (2-5), on tire :

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial x_1} = -\frac{\alpha \bar{u} + G}{\bar{p}}\,\frac{\partial \bar{p}}{\partial x_1} \quad \text{d'où} \quad \alpha = -\frac{G}{\bar{u}} - \frac{\bar{p}}{\bar{u}}\,\frac{\frac{\partial \bar{u}}{\partial x_1}}{\frac{\partial \bar{p}}{\partial x_1}} \qquad (2\text{-}10)$$

A la paroi $x_2 = 0$ $\quad \frac{G}{\bar{u}} = (1-\alpha)\,\frac{\bar{u} - \bar{u}^L}{\bar{u}} = (1-\alpha)\left(1 - \frac{\bar{u}^L}{\bar{u}}\right)$

Comme la seule phase présente à la paroi est le liquide $\alpha = 0$ et $\bar{u}^L = \bar{u}$. Donc $\left(\frac{G}{\bar{u}}\right)_{x_2=0} = 0$

De plus $\bar{p}$ est différent de zéro et nous éliminons les cas où $\frac{\partial \bar{p}}{\partial x_1}$ est infini .

A la paroi, nous avons donc :

$\bar{u} = 0$, $\quad \frac{\partial \bar{u}}{\partial x_1} = 0 \quad (\text{car } \bar{u} = 0 \quad \forall\, x_1)$

et la condition $\alpha = 0$ entraîne $\frac{1}{\bar{u}}\,\frac{\partial \bar{u}}{\partial x_1} = 0$

Or, à la paroi $\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial x_2}\right)_{x_2=0} = \frac{\bar{\tau}_o}{\mu_L}$ qui n'est fonction que de x_1.

Au voisinage de la paroi nous avons donc : $\bar{u} = \frac{\bar{\tau}_o}{\mu_L}\, x_2 + \xi(x_1 , x_2)\, x_2^2$

($\mathcal{E}(x_1 , x_2)$ étant un polynome en x_2)

$$\text{Donc : } \frac{1}{\bar{u}} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x_1} = \frac{x_2 \frac{\partial \bar{\tau}_o}{\partial x_1} + \mu_L x_2^2 \frac{\partial}{\partial x_1} \mathcal{E}(x_1 , x_2)}{x_2 \bar{\tau}_o + \mu_L x_2^2 \mathcal{E}(x_1 , x_2)}$$

$$\text{Quand } x_2 \to 0 \quad \frac{1}{\bar{u}} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x_1} \to \frac{1}{\bar{\tau}_o} \frac{\partial \bar{\tau}_o}{\partial x_1} = 0$$

Donc $\bar{\tau}_o$ est indépendant de x_1

$\bar{\tau}_o$ est donc une constante tout au long du canal, en dehors des discontinuités de pression.

Remarque

Le résultat précédent peut être démontré en dehors de l'hypothèse $\bar{v} \equiv 0$, en admettant cependant que la dérivée seconde de $\bar{v}$ par rapport à x_2 est égale à zéro à la paroi : $\left(\frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial x_2^2} \right)_{x_2=0} = 0.$

VI. Profils des vitesses moyennes en écoulement turbulent

Nous allons appliquer ici la méthode de [52] qui permet de déterminer la forme des profils en écoulement turbulent monophasique. Cette méthode a déjà été utilisée par [62] dans le cas d'un écoulement établi à bulles. Notre démarche est cependant différente dans la mesure où les équations dont nous partons sont les équations diphasiques, établies dans le chapitre 1, et non les équations phasiques. Nous ne nous bornons pas, par ailleurs, au régime établi.

Comme nous l'avons mentionné plus haut, la méthode "asymptoptique" présente l'avantage de ne pas imposer de relation fonctionnelle entre le tenseur des contraintes turbulentes (tensions de Reynolds) et le champ des vitesses et de leurs dérivées. Cet

avantage est particulièrement appréciable dans le domaine des écoulements à deux phases où l'expérience n'a pas encore permis de déterminer une telle relation.

La démarche suivie consiste à montrer par des considérations de similitude que, lorsque l'écoulement est turbulent (ce qui est réalisé en écoulement monophasique pour un nombre de Reynolds supérieur à 2000 environ) il peut être décrit par une loi de paroi "au voisinage" de celle-ci et par une loi de vitesse déficitaire "loin" de la paroi. Lorsque les zones correspondant à ces lois se recouvrent, il est possible, comme nous le verrons plus bas, de déterminer la forme des lois dans la zone commune.

Le mélange des deux phases favorisant la turbulence il sera possible de déterminer un domaine minimal de validité des lois proposées à partir des résultats obtenus dans l'étude des écoulements monophasiques, le domaine complet de validité ne pouvant être déterminé qu'expérimentalement (voir paragraphe XI).

Introduisons une vitesse de frottement à la paroi définie par $u_* = \sqrt{\frac{\overline{\tau_o}}{\rho_L}}$. $\overline{\tau_o}$ et u_* sont des constantes tout au long du canal, comme nous l'avons montré dans le paragraphe précédent.

Nous allons d'abord montrer que l'on peut supposer que la pression moyenne $\overline{p}$ est une fonction de l'abscisse x_1 seulement.

En effet, à la paroi $x_2 = 0$, l'équation (2-9) entraîne :

$$\left(\frac{\partial \overline{p}}{\partial x_2}\right)_{x_2=0} = -\left(\frac{\partial}{\partial x_2}\,\overline{(\rho V^2)'}\right)_{x_2=0} + \left(\frac{\partial \overline{\tau}}{\partial x_1}\right)_{x_2=0} - \mu_L \left(\frac{\partial^2 G}{\partial x_1\,\partial x_2}\right)_{x_2=0} - \rho_L\, g \sin\varphi$$

Or : $\left[\frac{\partial}{\partial x_2}\,\overline{(\rho V^2)'}\right]_{x_2=0} = 0$ car, à la paroi $V = 0$

$$\left(\frac{\partial \overline{\tau}}{\partial x_1}\right)_{x_2=0} = \frac{\partial \overline{\tau_o}}{\partial x_1} = 0$$

$$\left(\frac{\partial G}{\partial x_2} \right)_{2=0} = \left[\frac{\partial}{\partial x_2} (1 - \alpha) (\bar{u} - \bar{u}^L) \right]_{x_2=0}$$

$$= \left[(1 - \alpha) \frac{\partial}{\partial x_2} (\bar{u} - \bar{u}^L) \right]_{x_2=0} - \left[(\bar{u} - \bar{u}^L) \frac{\partial \alpha}{\partial x_2} \right]_{x_2=0}$$

$$= \left[\frac{\partial}{\partial x_2} (\bar{u} - \bar{u}^L) \right]_{x_2=0}$$

$$= 0$$

car à la paroi la seule phase présente est le liquide et $\bar{u}^L = \bar{u}$.

Donc $\left(\frac{\partial p}{\partial x_2} \right)_{x_2=0} = - \rho_L g \sin \varphi$

Un calcul d'ordre de grandeur montre que l'on peut négliger la variation de $\bar{p}$ en fonction de x_2.

En effet, pour un canal de demi-largeur e = 10 cm, on a nécessairement

$\left| \bar{p} - \bar{p}_{x_2=0} \right|$ de l'ordre de grandeur ou inférieur à $\rho_L g e = 10^4 Pa$

La pression moyenne étant toujours supposée supérieure à la pression atmosphérique, on en déduit que :

$$\frac{\left| \bar{p} - \bar{p}_{x_2=0} \right|}{\bar{p}} < 10^{-2}$$

Nous admettrons donc :

Hypothèse n) : $\bar{p} = \bar{p} (x_1)$

1. Loi de paroi

Nous allons adimensionnaliser les équations intervenant dans le problème en prenant comme unités :

de vitesse : u_*

de longueur : ν_L / u_*

de temps : ν_L / u_*^2

de masse : $\rho_L (\nu_L / u_*)^3$

Les variables adimensionnelles seront notées : $x_{i+} = x_i \, u_*/\nu_L$, $u_{i+} = u_i/u_*$, $t_+ = t \, u_*^2/\nu_L$, $\rho_+ = \rho/\rho_L$, $\mu_+ = \mu/\mu_L$, $p_+ = p/\rho_L \, u_*^2$.

Les équations locales instantanées du mouvement s'écrivent, en tenant compte des résultats du chapitre 1 (§ III-3 et IV-1, tableau 1)

$$\frac{\partial \rho_+}{\partial t_+} + \frac{\partial}{\partial x_{i+}} \rho_+ u_{i+} = 0$$

$$\rho + \frac{\partial u_{i+}}{\partial t_+} + \rho_+ u_{j+} \frac{\partial u_{i+}}{\partial x_{j+}} + \frac{\partial p_+}{\partial x_{i+}} + \frac{2}{3} \mu_+ \frac{\partial}{\partial x_{i+}} \left(\frac{\partial u_{k+}}{\partial x_{k+}} \right) \zeta_{ij}$$

$$- \mu_+ \frac{\partial}{\partial x_{j+}} \left(\frac{\partial u_{i+}}{\partial x_{j+}} + \frac{\partial u_{j+}}{\partial x_{i+}} \right) - \rho_+ \frac{g \nu_L}{u_*^3} \frac{\partial z_+}{\partial x_{i+}}$$

$$+ \sum_{-\infty}^{+\infty} (-1)^p \frac{\sigma}{\mu_L u_*} \frac{1}{a_{+_p}} \left(\frac{\vec{n} \cdot \vec{x_i}}{\vec{n} \cdot \vec{V_{I+}}} \right)_p \zeta_+ (t - t_{I_p}) = 0$$

où a est le rayon de courbure moyen de l'interface au point d'étude. $\vec{z}$ est le vecteur unitaire dans la direction verticale ascendante.

Les conditions aux frontières s'écrivent :

- Pour $x_{2+} = 0$ $\qquad \bar{u}_+ = 0$

$$\frac{\partial \bar{u}_+}{\partial x_{2+}} = 1$$

- Pour $x_{2+} = \frac{e \, u_*}{\nu_L} = R_*$ $\qquad \frac{\partial \bar{u}_+}{\partial x_{2+}} = 0$ car l'écoulement est supposé symétrique par rapport au plan $x_2 = e$.

Les conditions aux limites introduisent le rapport des débits massiques totaux du gaz et du liquide.

Si 2e M_g et 2e M_L représentent ces débits (dans un canal de largeur unité), ce rapport est représenté par le titre

$x = \frac{M_g}{M_g + M_L}$, qui dans nos conditions sera toujours voisin de $\frac{M_g}{M_L}$.

Les paramètres et variables qui interviennent dans le problème dynamique sont donc :

$$u_+,\ v_+,\ x_{1+},\ x_{2+},\ p_+,\ \frac{\mu_g}{\mu_L},\ \frac{\rho_G}{\rho_L},\ \frac{g\,\nu_L}{u_*^3},\ \operatorname{tg}\psi,\ \frac{\sigma}{\mu_L\,u_*},\ x,\ t_+,\ R_*$$

et l'ensemble des rayons de courbure adimensionnels

$$a_{-\infty+}\ ,\ \ldots\ ,\ a_{p+}\ ,\ \ldots\ a_{+\infty+}\ .$$

μ_g/μ_L et ρ_g/ρ_L apparaissent comme valeurs des paramètres μ_+ et ρ_+ quand le point d'étude se trouve dans la phase gazeuse. Le paramètre ρ_g/ρ_L peut aussi s'écrire : $\rho_g/\rho_L = \frac{u_*^2}{rT}\,p_+$, ce qui introduit le paramètre $\frac{u_*^2}{rT}$ (p_+ apparaissant indépendamment).

Le paramètre tg φ doit être conservé car, contrairement à ce qui se passe en écoulement monophasique, on ne peut pas facilement définir ici de pression motrice.

L'ensemble des rayons de courbure adimensionnels peut être remplacé par le rayon de courbure moyen $\bar{a}_+$ et l'ensemble des nombres $\frac{a_{-\infty+}}{\bar{a}_+}\ ,\ \ldots\ ,\ \frac{a_{p+}}{\bar{a}_+}\ ,\ \ldots\ ,\ \frac{a_{+\infty+}}{\bar{a}_+}$ ce dernier ensemble pouvant être représenté par la fonction densité de probabilité adimensionnelle des rayons de courbure $\bar{a}\ h(a)$ (voir note).

NOTE

L'ensemble des nombres $\frac{a_{-\infty+}}{\bar{a}_+}\ ,\ldots,\ \frac{a_{p+}}{\bar{a}_+}\ ,\ldots\ \frac{a_{+\infty+}}{\bar{a}_+}$ peut être remplacé par la fonction densité de probabilité $h\left(\frac{a}{\bar{a}}\right)$ définie par :

$$h\left(\frac{a}{\bar{a}}\right) d\left(\frac{a}{\bar{a}}\right) = \text{Probabilité}\ \left\{ \frac{a}{\bar{a}} < X \leq \frac{a}{\bar{a}} + d\left(\frac{a}{\bar{a}}\right) \right\}$$

$$= \text{Probabilité}\ \left\{ a < \bar{a}\,X \leq a + \bar{a}\,d\left(\frac{a}{\bar{a}}\right) \right\}$$

$$= \bar{a}\ h\ (a)\ d\left(\frac{a}{\bar{a}}\right)$$

La fonction densité de probabilité adimensionnelle des rayons de

Quant aux paramètres $\left(\frac{\vec{n} \cdot \vec{x}_i}{\vec{n} \cdot \vec{V}_{I+}} \right)_p$ où $p \in]-\infty, +\infty[$, ils font apparaître les composantes u_+ et v_+ de la vitesse et l'angle de la normale à l'interface avec l'un des axes de coordonnées. En effet on a par exemple :

$$\frac{\vec{n} \cdot \vec{x}_i}{\vec{n} \cdot \vec{V}_{I+}} = \frac{n_1}{n_1 u_+ + n_2 v_+} = \frac{1}{u_+ + \frac{n_2}{n_1} V_+}$$

où $\frac{n_2}{n_1} = \text{tg } (\vec{n}, \vec{x}_1)$

On admet que les angles $(\vec{n}, \vec{x}_1)$ sont équiprobables (voir annexe II) : aucun paramètre supplèmentaire n'apparaît donc.

Les paramètres et variables mis en évidence étant liés par trois équations, nous en déduisons que leurs valeurs moyennes seront elles-mêmes liées par trois relations.

L'hypothèse de stationnarité (hypothèse b) impose une relation supplèmentaire qui permet d'éliminer le temps de l'ensemble des paramètres.

Les 14 paramètres : $\bar{u}_+$, v_+, x_{1+}, x_{2+}, $\bar{P}_+$, μ_g/μ_L, u_*^2/rT ; $\frac{g \nu_L}{u_*^3}$, tg φ, $\frac{\sigma}{\mu_L u_*}$, x, $\bar{a}_+$, $\bar{a}$ h (a) et R_* étant liés par 3 relations, onze sont indépendants. Comme x_{1+} et $\bar{p}_+$ sont liés par une relation indépendante de x_{2+}, nous choisissons le groupe

x_{2+}, $\bar{P}_+$, x, $\frac{u_*^2}{rT}$, $\frac{\mu_g}{\mu_L}$, $\frac{\sigma}{\mu_L u_*}$, $\frac{g \nu_L}{u_*^3}$, tgφ, $\bar{a}_+$, $\bar{a}$ h(a) et R_*

dont est fonction la vitesse moyenne $\bar{u}_+$.

NOTE (suite)
courbure est donc la fonction $\bar{a}$ h(a). La moyenne d'ordre n d'un rayon de courbure adimensionnalisé par le rayon de courbure moyen est donnée par la relation

$$\overline{\left(\frac{a}{\bar{a}}\right)^n} = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{a}{\bar{a}}\right)^n \bar{a}\, h\,(a)\, d\left(\frac{a}{\bar{a}}\right)$$

Le nombre de Reynolds n'intervient pas dans les équations. Les conditions imposées au champ des vitesses sur la frontière $x_{2+} = 0$ sont indépendantes du nombre de Reynolds tandis que les conditions sur l'autre frontière peuvent s'exprimer sous la forme d'égalités entre des grandeurs moyennes adimensionnelles et des nombres indépendants du nombre de Reynolds qui doivent être satisfaites pour $x_{2+} = R_{*}$. Lorsque R_{*} tend vers l'infini, on peut donc prévoir que la solution statistique moyenne $\overline{u}_+$ ne doit pas dépendre de R_{*} pour des valeurs finies de x_{2+}, donc que la répartition des vitesses moyennes peut s'exprimer sous la forme de la loi de paroi :

$$\overline{u}_+ = f\left(x_{2+},\ \overline{P}_+,\ x,\ \frac{\mu_g}{\mu_L},\ \frac{u_*^2}{r\,T},\ \frac{g\,\nu_L}{u_*^3},\ \operatorname{tg}\varphi,\ \frac{\sigma}{\mu_L u_*},\ \overline{a}_+,\ \overline{a}\,h\,(a) \right) \qquad (2\text{-}11)$$

Cette loi indépendante du nombre de Reynolds est valable seulement pour des valeurs petites de x_{2+} lorsque le nombre de Reynolds R_{*} est suffisamment grand.

2. Loi de vitesse déficitaire

Soit $\overline{u}_m$ la valeur de $\overline{u}$ pour $x_2 = e$ à une abscisse x_1 proche de x_{10}, qui est prise pour abscisse de référence, et soit $\overline{u}_{mo}$ la valeur de cette vitesse pour $x_1 = x_{10}$

Posons
$$u_d = u - \overline{u_{mo}} \equiv u_{1d}$$
$$v_d = v \equiv u_{2d}$$
$$X_1 = x_1 - \overline{u_{mo}}\ t$$
$$X_2 = x_2$$

Nous prendrons comme unités :

de vitesse : u_{*}

de longueur : e

de temps : e/u_{*}

de masse : $\rho_L\, e^3$

Les variables adimensionnelles seront notées : $x'_i = x_i/e$; $t' = tu_*/e$; $u_{i+} = u_i/u_*$; $\rho_+ = \rho/\rho_L$; $\mu_+ = \mu/\mu_L$: $p_+ = p/\rho_L u_*^2$

Les équations locales instantanées du mouvement ont la même forme dans les repères (X_1, X_2) et (x_1, x_2) en translation uniforme l'un par rapport à l'autre. Adimensionnalisées, les équations s'écrivent :

$$\frac{\partial \rho_+}{\partial t'} + \frac{\partial}{\partial x'_i} \rho_+ u_{id+} = 0$$

$$\rho_+ \frac{\partial u_{id+}}{\partial t'} + \rho_+ u_{jd+} \frac{\partial u_{id+}}{\partial x'_j} + \frac{\partial p_+}{\partial x'_i} + \frac{2}{3} \frac{\mu_+}{R_*} \frac{\partial}{\partial x'_i} \left(\frac{\partial u_{Kd+}}{\partial x'_K} \right) \delta_{ij}$$

$$- \frac{\mu_+}{R_*} \frac{\partial}{\partial x'_j} \left(\frac{\partial u_{id+}}{\partial x'_j} + \frac{\partial u_{jd+}}{\partial x'_i} \right) - \rho_+ \frac{g\, e}{u_*^2} \frac{\partial z'}{\partial x'_i}$$

$$+ \sum_{-\infty}^{+\infty} (-1)^p \frac{\sigma}{e \rho_L u_*^2} \frac{1}{a'_p} \left(\frac{\vec{n} \cdot \vec{x}_i}{\vec{n} \cdot \vec{V}_{Id_+}} \right)_p \delta' (t - t_{I_p}) = 0$$

Les équations locales instantanées ne font apparaître le nombre de Reynolds $R_* = \frac{e\, u_*}{\nu_L}$ que dans les termes de viscosité sous la forne $\frac{1}{R_*} \mu_+ \frac{\partial^2 u_{jd+}}{\partial x'^2_i}$, termes qui s'annulent quand $R_* \longrightarrow \infty$. Dans ce cas le paramètre μ_+ n'intervient plus.

D'autre part, les termes de pesanteur et de tension superficielle donnent lieu aux paramètres :

$$\frac{g\, e}{u_*^2} \quad , \quad \frac{\sigma}{e \rho_L u_*^2} \quad \text{et} \quad tg\ \varphi$$

La granulométrie intervient par les nombres $\bar{a}'$ et $\bar{a}\, h\ (a)$. Les conditions aux frontières s'écrivent :

- Pour $x'_2 = X'_2 = 0$ $\qquad \bar{u}_{d+} = - \bar{u}_{mo+}$

$$\frac{d\, \bar{u}_{d+}}{d\, x'_2} = R_{*o}$$

- Pour $x'_2 = X'_2 = 1$ $\quad \frac{\partial u_{d+}}{\partial x'_2} = 0$

$$\bar{u}_{d+} = \bar{u}_{m+} - \bar{u}_{mo+}$$

$\bar{u}_{m+} - \bar{u}_{mo+}$ est une fonction de $x_1 - x_{10}$ et des autres paramètres, fonction qui tend vers zéro quand x_1 tend vers x_{10}.

Les conditions initiales font apparaître le titre $x = \frac{M_g}{M_g + M_L}$.

Quand $R_{\ast} \longrightarrow \infty$ et quand $x_1 \longrightarrow x_{10}$, la répartition des vitesses moyennes $\bar{u}_+$ prend donc nécessairement la forme :

$$\bar{u}_+ - \bar{u}_{m+} = g\left(x'_2, \bar{p}_+, x, \frac{u_*^2}{rT}, \frac{g\,e}{u_*^2}, tg\varphi, \frac{\sigma}{e\,\rho_L\,u_*^2}, \bar{a}', \bar{a}h(a)\right) \quad (2\text{-}12)$$

Cette loi de vitesse déficitaire donne la variation de $\bar{u}_+$ en fonction de x'_2 pour x_1 fixé, loin de la paroi.

$\bar{u}_{m+}$ dépend de tous les paramètres apparus dans le problème à l'exception des variables x_{2+} et x'_2 :

$$\bar{u}_{m+} = h\left(\bar{p}_+, x, \frac{\mu_g}{\mu_L}, \frac{u_{\ast}^2}{rT}, \frac{g\,\nu_L}{u_{\ast}^3}, \frac{g\,e}{u_{\ast}^2}, tg\,\varphi, \frac{\sigma}{\mu u_{\ast}}, \frac{\sigma}{e\rho_L u_{\ast}^2}, \bar{a}_+, \bar{a}', a\,h(a)\right)$$

Comme en écoulement monophasique, nous avons montré que les profils de vitesse dans un canal de section constante peuvent s'exprimer par une loi de paroi aux valeurs finies de x_{2+} et par une loi de vitesse déficitaire aux valeurs de x'_2 voisines de 1.

Ces lois sont fonctions d'un grand nombre de paramètres, autres que x_{2+} ou x'_2. Nous allons maintenant voir que des lois logarithmiques peuvent être déterminées.

3. Lois logarithmiques

Quand le nombre de Reynolds $R_{\ast} = \frac{e\,u_{\ast}}{\nu_L}$ tend vers l'infini, nous avons simultanément les deux lois :

- Pour $0 < x_{2+} < b\ (x_1)$:

$$\bar{u}_+ = f\left(x_{2+}, \bar{p}_+, x, \frac{\mu_g}{\mu_L}, \frac{u_{\ast}^2}{rT}, \frac{g\,\nu_L}{u_{\ast}^3}, tg\ \varphi, \frac{\sigma}{\mu_L u_{\ast}}, \bar{a}_+, \bar{a}\ h\ (a)\right)$$

- Pour a $(x_1) < x'_2 < 1$:

$$\bar{u}_+ - \bar{u}_{m+} = g \left(x'_2, \bar{p}_+, x, \frac{u_*^2}{r\bar{T}}, \frac{g\ e}{u_*^2}, \text{tg}\ \varphi\ , \frac{\sigma}{e\ \rho_L\ u_*^2}, \bar{a}', \bar{a}\ h\ (a) \right.$$

Les lois f et g étant fonctions de x_1 par l'intermédiaire de la pression $\bar{p}$, il est en effet raisonnable d'estimer a priori que leurs domaines de validité sont eux aussi fonctions de x_1. D'autre part, la présence des deux phases favorisant la turbulence, il est évident que les limites $a(x_1)$ et $b(x_1)$ doivent être respectivement inférieure et supérieure aux limites homologues a et b en écoulement monophasique du liquide seul de même débit. On doit donc avoir :

$$a(x_1) \leqslant \frac{30}{R_*} \quad \text{et} \quad b(x_1) \geqslant 0{,}2\ R_*$$

Dans l'intervalle commun aux deux lois :

$$a(x_1)\ R_* < x_{2+} < b\ (x_1)$$

ou

$$a(x_1) < x'_2 < \frac{b\ (x_1)}{R_*}$$

Ces lois sont valables simultanément, donc la distribution des vitesses doit satisfaire à l'égalité :

$$f\ (x_{2+},\ \pi_0\ ,\ \pi_1) = g\ (x'_2, \pi_0, \pi_2) + h\ (\pi_0, \pi_1, \pi_2, R_*)$$

où π_0 représente les paramètres communs aux deux lois, c'est-à-dire :

$$\bar{p}_+,\ x\ ,\ \frac{u_*^2}{r_T},\ \text{tg}\ \varphi\ ,\ \bar{a}\ h(a)$$

π_1 représente les paramètres intervenant dans f et non dans g : $\frac{\mu_g}{\mu_L}$, $\frac{g\ \nu_L}{u_*^3}$, $\frac{\sigma}{\mu_L\ u_*}$, $\bar{a}_+$

π_2 représente les paramètres intervenant dans g et non dans f : $\frac{g\ e}{u_*^2}$, $\frac{\sigma}{e\ \rho_L\ u_*^2}$ et a'

Si l'on dérive l'égalité ci-dessus par rapport à x_{2+}, on voit que

$$\frac{\partial f}{\partial x_{2+}} = \frac{\partial g}{\partial x'_2} \frac{\partial x'_2}{\partial x_{2+}} = \frac{\partial g}{\partial x'_2} \frac{x'_2}{x_{2+}} \quad , \quad \text{d'où :}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_{2+}} x_{2+} = \frac{\partial g}{\partial x'_2} x'_2 = A(\pi_0)$$

D'où on déduit que :

$$f = A(\pi_0) \operatorname{Log} x_{2+} + B_1(\pi_0, \pi_1)$$

$$g = A(\pi_0) \operatorname{Log} x'_2 + C_1(\pi_0, \pi_2)$$

$$h = A(\pi_0) \operatorname{Log} R_{**} + B_1(\pi_0, \pi_1) - C_1(\pi_0, \pi_2)$$

En combinant les paramètres π_0 et π_1 d'une part et π_0 et π_2 d'autre part, nous faisons apparaître les paramètres :

$\frac{(g \nu_L)^2}{(r T)^3}$, $\frac{\sigma^2}{\mu_L^2 r T}$, $\frac{a^2 r T}{\nu_L^2}$ intervenant dans la fonction f, et

$\frac{ge}{rT}$, $\frac{\sigma}{e \rho_L rT}$ intervenant dans la fonction g.

Nous avons donc

$$\bar{u}_+ = A\left[\bar{p}_+ , x , \frac{u_{**}^2}{rT} , \operatorname{tg}\varphi , \bar{a}\, h(a) \right] \operatorname{Log} x_{2+} + B\left[p_+ , x, \frac{u_{**}^2}{rT}, \operatorname{tg}\varphi , \bar{a}\, h(a), \frac{\mu g}{\mu_L}, \frac{(g \nu_L)^2}{(r T)^3} , \frac{\sigma^2}{\mu_L^2 rT}, \frac{\bar{a}^2 rT}{\nu_L^2} \right] \quad (2\text{-}13)$$

$$\bar{u}_+ - \overline{u_{m+}} = A\left[\bar{p}_+, x, \frac{u_{**}^2}{rT} , \operatorname{tg}\varphi , \bar{a}\, h(a) \right] \operatorname{Log} x'_2 + C\left[\bar{p}_+, x, \frac{u_{*}^2}{rT}, \operatorname{tg}\varphi, \bar{a}\, h(a), \frac{ge}{rT} , \frac{\sigma}{e \rho_L rT} , \bar{a}' \right] \quad (2\text{-}14)$$

4. Variation des profils en fonction de $\bar{p}_+$

Posons $G_+ = G/u_*$

$$m_{L+} = \frac{m_L\ (x_2)}{\rho_L\ u_*} = (1 - \alpha)\ \bar{u}_+ - G_+$$

$$m_{g+} = \frac{m_g\ (x_2)}{\rho_L\ u_*} = \frac{u_*^2}{r\ T}\ (\alpha\ \bar{p}_+\ \bar{u}_+ + \bar{p}_+\ G_+)$$

La relation (2-4) s'écrit en coordonnées adimensionnelles :

$$\bar{u}_+ = m_{L+}\ (x_{2+}) + \frac{r\ T}{u_*^2}\ \frac{m_{g+}\ (x_{2+})}{\bar{p}_+} \qquad (2\text{-}15)$$

Dérivons cette relation par rapport à $\bar{p}_+$:

$$\frac{\partial\ \bar{u}_+}{\partial\ \bar{p}_+} = -\ \frac{r\ T}{u_*^2}\ \frac{m_{g+}\ (x_{2+})}{\bar{p}_+^{\,2}}$$

On en déduit :

$$m_{g+} = -\ \frac{u_*^2}{r\ T}\ \bar{p}_+^{\,2}\ \frac{\partial\ \bar{u}_+}{\partial\ \bar{p}_+} \qquad (2\text{-}16)$$

$$m_{L+} = \bar{u}_+ + \bar{p}_+\ \frac{\partial\ \bar{u}_+}{\partial\ \bar{p}_+} \qquad (2\text{-}17)$$

Dans la zone logarithmique, on a donc :

$$m_{g+} = -\ \frac{u_*^2}{rT}\ \bar{p}_+^{\,2} \left[\frac{\partial\ A}{\partial\ p_+} \text{Log}\ x_{2+} + \frac{\partial\ B}{\partial\ p_+} \right]$$

$$m_{L+} = \left(A + \bar{r}_* + \frac{\partial\ A}{\partial\ p_+} \right) \text{Log}\ x_{2+} + \left(B + \bar{p}_+\ \frac{\partial\ B}{\partial\ \bar{p}_+} \right)$$

Or m_L et m_g ne sont pas fonctions de x_1 donc m_{g+} et m_{L+} ne sont pas fonctions de p_+. Ceci étant vrai quelque soit x_{2+}, on déduit que :

$$A + \bar{p}_+\ \frac{\partial\ A}{\partial\ p_+} = A_o \quad \text{d'où} \quad A = A_o + \frac{A_1}{\bar{p}_+}\ \frac{rT}{u_*^2}$$

$$B + \bar{p}_+\ \frac{\partial\ B}{\partial\ \bar{p}_+} = B_o \quad \text{d'où} \quad B = B_o + \frac{B_1}{\bar{p}_+}\ \frac{rT}{u_*^2}$$

et que :

$$m_{g+} = A_1 \text{ Log } x_{2+} + B_1 \qquad (2\text{-}18)$$

$$m_{L+} = A_o \text{ Log } x_{2+} + B_o \qquad (2\text{-}19)$$

A_1, A_o, B_1 et B_o sont fonctions de tous les paramètres mis en évidence précédemment à l'exception de $\bar{p}_+$.

5. Vitesses débitantes. Débits massiques des phases

Comme en écoulement monophasique, nous définissons la vitesse débitante de l'émulsion par l'identité :

$$\mathcal{U} = \frac{1}{2e} \int_0^{2e} \bar{u} \; d x_2$$

Soit : $$\mathcal{U}_+ = \frac{\mathcal{U}}{u_*} = \frac{1}{R_*} \int_0^{R_*} \bar{u}_+ \; d x_{2+}$$

Nous supposerons que les lois logarithmiques sont valables dans tout l'écoulement. On a alors :

$$\mathcal{U}_+ = A \; (\text{Log } R_{\divideontimes} - 1) + B \qquad (2\text{-}20)$$

Les débits massiques adimensionnels par unité de surface du gaz et du liquide sont égaux à :

$$M_{g+} = \frac{1}{R_{\divideontimes}} \int_0^{R_{\divideontimes}} m_{g+} \; dx_{2+} = A_1 \; (\text{Log } R_{\divideontimes} - 1) + B_1 \qquad (2\text{-}21)$$

$$M_{L+} = \frac{1}{R_{\divideontimes}} \int_0^{R_{\divideontimes}} m_{L+} \; d_{x_{2+}} = A_o \; (\text{Log } R_{\divideontimes} - 1) + B_o \qquad (2\text{-}22)$$

Nous avons naturellement la relation :

$$\mathcal{U}_+ = M_{L+} + \frac{r \; T}{u_{\divideontimes}^2} \; \frac{M_{g+}}{\bar{p}_+}$$

VII. Frottement

1. Expression

Par analogie avec les écoulements monophasiques, nous définissons un coefficient de frottement f par la relation :

$$\tau_o = \rho_L u_*^2 = f \rho_L \frac{u_L^2}{2}$$

où u_L est la vitesse débitante du liquide : $u_L = \frac{M_L}{\rho_L}$

On déduit de cette définition :

$$\sqrt{\frac{2}{f}} = \frac{u_L}{u_*} = \frac{M_L}{\rho_L u_*} = M_{L+}$$

$$= A_o \left[x, \frac{u_*^2}{rT}, tg\,\varphi, \bar{a}\, h(a) \right] (\text{Log } R_* - 1) + B_o \left[x, \frac{u_*^2}{rT}, tg\,\varphi, \bar{a}\, h(a), \frac{\mu_g}{\mu_L}, \right.$$

$$\left. \frac{g\, \nu_L^2}{r\, T^3}, \frac{\sigma^2}{u_L^2\, rT}, \frac{\bar{a}^2\, rT}{\nu_L^2} \right]$$

Or :

$$R_* = \frac{u_* \, e}{\nu_L} = \frac{1}{4} \frac{u_*}{u_L} \frac{u_L \, 4\, e}{\nu_L} = \frac{1}{4} Re_L \sqrt{\frac{f}{2}}$$

en posant, par définition : $Re_L = \frac{4\, e\, u_L}{\nu_L}$

Posons en outre :

$\mathcal{F}r_L = \frac{4\, e\, g}{u_L^2}$ (nombre de Froude Liquide)

$W_{b_L} = \frac{\sigma}{\rho_L\, 4e\, u_L^2}$ (nombre de Weber Liquide)

$\mathcal{M}_L = \frac{u_L}{\sqrt{rT}}$ (nombre de Mach Liquide)

Nous voyons que :

$$\frac{u_*^2}{r\ T} = \mathcal{M}_L^2\ \frac{f}{2}$$

$$\frac{\left(g\ \nu_L\right)^2}{\left(r\ T\right)^3} = \left(\frac{\mathcal{G}r_L}{Re_L}\ \mathcal{M}_L^3\right)^2$$

$$\frac{\sigma^2}{\mu_L^2\ r\ T} = \left(Wb_L\ R_{e_L}\ \mathcal{M}_L\right)^2$$

$$\frac{\bar{a}^2\ r\ T}{\nu_L^2} = \left(\frac{\bar{a}}{4e}\ \frac{\mathcal{R}e_L^2}{\mathcal{M}_L}\right)^2$$

Nous avons donc :

$$\sqrt{\frac{2}{f}} = A_o\left(\pi_1, \mathcal{M}_L\ \sqrt{\frac{f}{2}}\right) \text{Log}\ \frac{1}{4}\ Re_L\ \sqrt{\frac{f}{2}} + B_o\left(\pi_1, \pi_2, \mathcal{M}_L\ \sqrt{\frac{f}{2}}\right) - A_o$$

où π_1 représente les paramètres : x, tg φ, $\bar{a}$ h(a)

π_2 représente les paramètres : $\frac{\mu_g}{\mu_L}$, $\frac{\mathcal{G}_r\ \mathcal{M}_L^3}{R_{eL}}$ Wb_L Re_L $\mathcal{M}_L$, $\frac{\bar{a}}{4e}\frac{Re_L}{\mathcal{M}_L}$

ou encore

$$\sqrt{\frac{2}{f}} = G_o\left[\pi_1, \mathcal{M}_L\ \sqrt{\frac{f}{2}}\right] \text{Log}\ Re_L\ \sqrt{\frac{f}{2}} + H_o\left[\pi_1, \pi_2, \mathcal{M}_L\ \sqrt{\frac{f}{2}}\right] \qquad (2\text{-}23)$$

dans laquelle $\left|\begin{array}{l} G_o \equiv A_o \\ H_o = B_o - A_o\ \text{Log}\ 4 - A_o \end{array}\right.$

2. Remarque 1

On aurait pu faire intervenir le rôle du gaz de façon plus explicite en définissant un coefficient de frottement f_g par la relation

$$\tau_o = \rho_L u_*^2 = f_g \frac{M_g^2}{2 \rho_L}$$

Cependant la présence du liquide à la paroi donne à celui-ci un rôle particulier (il n'y a pas symétrie du rôle des deux phases).

Entre f et f_g existe la relation

$$\tau_o = f \frac{M_L^2}{2 \rho_L} = f_g \frac{M_g^2}{2 \rho_L}$$

Donc $\sqrt{\frac{f}{f_g}} = \frac{M_g}{M_L} = \frac{x}{1 - x} \simeq x$ dans le cas où on suppose que le titre est voisin de zéro.

On a donc :

$$\sqrt{\frac{2}{f_g}} = x \sqrt{\frac{2}{f}} = x G_o \text{ Log } Re_L \times \sqrt{\frac{f_g}{2}} + x H_o$$

$$= x G_o \text{ Log } Re_L \sqrt{\frac{f_g}{2}} + x (H_o + G_o \text{ Log } x)$$

Le calcul direct de f_g donne :

$$\sqrt{\frac{2}{f_g}} = \frac{M_g}{\rho_L u_*} = M_{g+} = G_1 \text{ Log } Re_L \sqrt{\frac{f}{2}} + H_1$$

$$= G_1 \text{ Log } Re_L \sqrt{\frac{f_g}{2}} + H_1 + G_1 \text{ Log } x$$

G_1 et H_1 étant les grandeurs homologues à G_o et H_o dans l'équation du gaz.
Les grandeurs G et H n'étant pas fonctions des mêmes paramètres on déduit que

$$G_o = \frac{G_1}{x} \quad \text{et} \quad H_o = \frac{H_1}{x}$$

D'où $x = \frac{G_1}{G_o} = \frac{H_1}{H_o}$

3. Remarque 2

CRAVAROLO et al. [63] ont effectué des mesures directes de la contrainte tangentielle d'écoulements eau-argon et alcool ethylique-argon, en fonction du débit massique par unité de surface du liquide, pour divers débits massiques par unité de surface du gaz. Les frontières des différentes configurations d'écoulement, d'après BAKER [64] sont reportées sur leurs graphes (figures 2-3 et 2-4).

Il est remarquable de constater sur ces courbes que la loi donnant τ_o en fonction de M_L (donc donnant f en fonction de Re_L) dépend fort peu de la configuration d'écoulement : la traversée des frontières ne s'effectue qu'avec des variations de pente extrêmement faibles.

Or, dans nos relations la configuration d'écoulement est représentée par les paramètres $\bar{a}\ h\ (a)$ et $\bar{a}/4e$.

Ces paramètres auraient donc une influence négligeable sur le coefficient de frottement. Par ailleurs, si l'on admet que les forces dues à la tension superficielle sont négligeables par rapport aux forces de pression, de gravité et d'inertie, nous devons admettre que le nombre de Weber n'intervient pas lui non plus.

Nous avons représenté les courbes de CRAVAROLO et al. sur les figures 2-3 et 2-4. M_g et M_L représentent les débits massiques par unité de surface du gaz et du liquide respectivement.

4. Approximation du voisinage du titre x = 0

La formule (2-23) obtenue précédemment, permet de déterminer le coefficient de frottement dans un écoulement diphasique. Cette formule se confond avec la formule de KARMAN-NIKURADZE lorsque le titre x est égal à zéro. Les coefficients G_o et M_o sont donc égaux dans ce cas aux constantes universelles 2,45 et 3,9.

Lorsque le titre x est très faible, le coefficient de frottement f peut donc être approximé par une relation linéaire de la forme :

$$f = f_L\ (1 + \lambda\ x + 0(x^2))$$

où f_L est le coefficient de frottement dû au liquide évoluant seul avec le même débit dans le canal considéré.

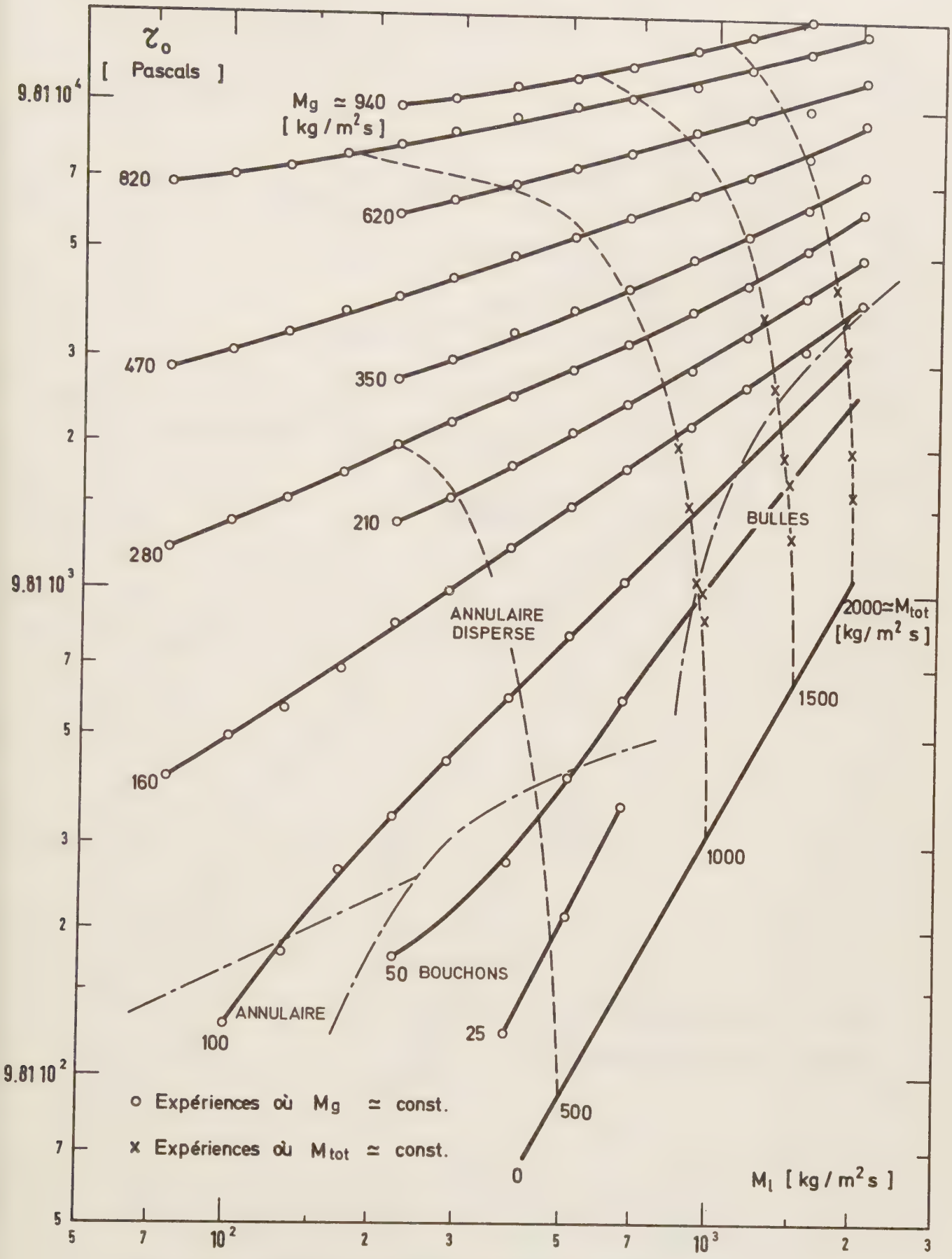


Fig. 2.3 – Contrainte tangentielle à la paroi, d'après [63]

Mélanges Argon - Eau à $\rho_g = 36{,}1 \times 10^{-3}$ kg / m³

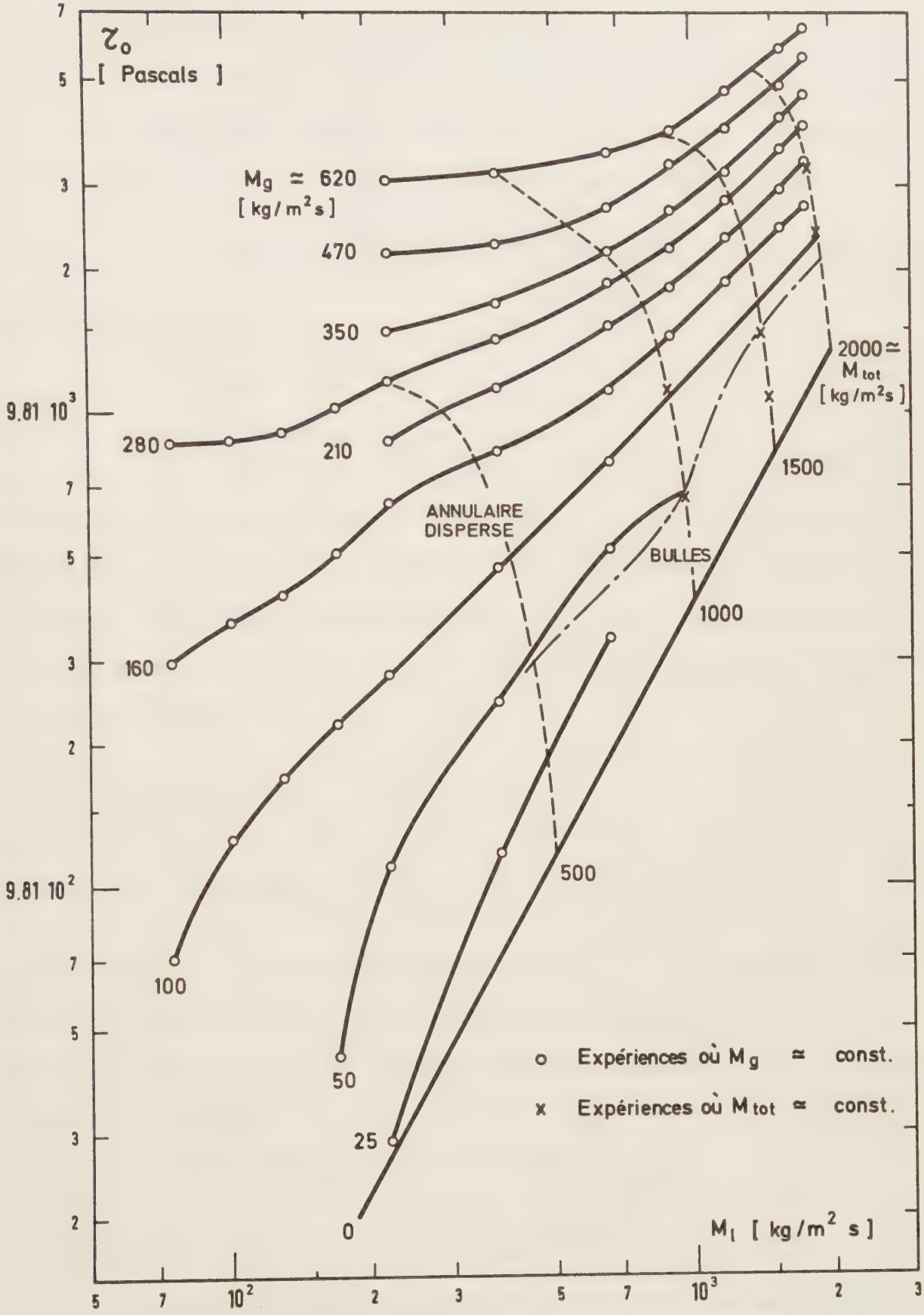


Fig. 2.4 – Contrainte tangentielle à la paroi, d'après [63]
Mélanges Argon-Alcool à $\rho_g = 36{,}1 \times 10^{-3}$ kg/m³

Le coefficient λ est naturellement fonction des paramètres adimensionnels mis en évidence plus haut, notamment du nombre de Reynolds.

La contrainte tangentielle à la paroi s'écrit en écoulement diphasique $\tau_o = f \frac{\rho_L \mathcal{U}_L^2}{2}$ et en écoulement monophasique

$$\tau_{oL} = f_L \frac{\rho_L \mathcal{U}_L^2}{2}$$ pour le même nombre de Reynolds Re_L.

Nous avons donc

$$\boxed{\frac{\tau_o}{\tau_{o\,L}} = \frac{f}{f_L} = (1 + \lambda\, x).}$$

Si l'on admet que l'influence du nombre de Mach est faible la formule (2-23) est alors identique à la formule de KARMAN-NIKURADZE, les coefficients n'étant toutefois pas des constantes, mais étant indépendants de la vitesse du liquide. Le coefficient λ introduit plus haut peut alors s'expliciter et l'on montre (annexe III) qu'il a la forme

$$\lambda = -2\, \frac{G'_o(O)\ \mathrm{Log}\ Re_L \sqrt{\frac{f_L}{2}} + H'_o(O)}{G_o(O)\ \mathrm{Log}\ Re_L \sqrt{\frac{f_L}{2}} + H_o(O) + G_o(O)}$$

On peut obtenir une expression plus simple de λ en partant de la formule de BLASIUS dont la représentation graphique se confond avec celle de la formule de KARMAN-NIKURADZE pour une large plage de nombres de Reynolds (10^4 - 10^5) : $f = f_o\ (Re_L)^n$. Le calcul effectué en annexe montre que l'on a alors :

$$\lambda = \frac{1}{f_o(x=o)} \left[\left(\frac{\partial f_o}{\partial x} \right)_{x=o} + \left(\frac{\partial n}{\partial x} \right)_{x=o} \mathrm{Log}\ Re_L \right]$$

Le voisinage du titre x=o se rencontre fréquemment dans les écoulements diphasiques à deux composants.

VIII. Variation de la pression en fonction de x_1

1. Expression

On a vu précédemment (formule (2-8)) que :

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial x_1}\left[1 - \frac{rT\ m(x_2)\ m_g(x_2)}{\bar{p}^2}\right] - \frac{\partial \bar{\tau}}{\partial x_2} + \mu_L \frac{\partial^2 G}{\partial x_2^2} + \bar{\rho}\, g \cos \varphi = 0$$

Intégrons cette équation de 0 à 2e par rapport à x_2. Les divers termes donnent :

$$a) \int_0^{2e} \frac{\partial \bar{\tau}}{x_2}\, d x_2 = \bar{\tau}(2e) - \bar{\tau}(0) = -2\,\bar{\tau}(0)$$

car, par raison de symétrie $\bar{\tau}(2e) = -\bar{\tau}(0)$

$$b) \int_0^{2e} \frac{\partial^2 G}{\partial x_2^2}\, d x_2 = \left(\frac{\partial G}{\partial x_2}\right)_{2e} - \left(\frac{\partial G}{\partial x_2}\right)_0 = 0$$

On a vu en effet que, à la paroi : $\left(\frac{\partial G}{\partial x_2}\right) = 0$

$$c) \int_0^{2e} \bar{\rho}\, d x_2 = 2e \langle \bar{\rho} \rangle \quad \text{par définition}$$

$$= 2e \langle \alpha\, \rho_g + (1 - \alpha)\, \rho_L \rangle$$

$$\# 2e\, \rho_L\, (1 - \langle \alpha \rangle) \text{ en admettant que } \rho_g \ll \rho_L$$

pour des taux de vide assez différents de 1 ($\alpha \leqslant 0{,}9$ par exemple).

$$d) \int_0^{2e} m\,(x_2)\, m_g\,(x_2)\, d x_2 = 2\left[\int_0^{R*} m_+\, m_{g+}\, d x_{2+}\right]\left(\rho_L\, u_*\right)^2 \Big/ \frac{R*}{e}$$

Nous admettrons que la loi logarithmique est valable entre O et R*, comme nous l'avons déjà admis plus haut.

$$m_+ \simeq m_{L+} = A_o \text{ Log } x_{2+} + M_{L+} - A_o \text{ (Log } R* - 1)$$

$$m_{g+} = A_1 \text{ Log } x_{2+} + M_{g+} - A_1 \text{ (Log } R_* - 1)$$

Donc

$$\int_0^{2e} m(x_2)\, m_g(x_2)\, dx_2 = 2\, \frac{e}{R*}\, (\rho_L\, u_*)^2 \int_0^{R*} \Big[A_o \text{ Log } x_{2+} + M_{L+}$$

$$- A_o \text{ Log } (R_* - 1)\Big] \cdot \Big[A_1 \text{ Log } x_{2+} + M_{g+} - A_1 \text{ Log } (R_* - 1)\Big] \quad d x_{2+}$$

$$= \frac{2\, e}{R*}\, (\rho_L\, u_*)^2 \left\{ A_o\, A_1 \int_0^{R*} (\text{Log } x_{2+})^2\, d\, x_{2+} \right.$$

$$+ \Big[M_{L+} - A_o \text{ Log } (R* - 1)\Big]\, R*\, M_{g+} + R* \Big[M_{g+} - A_1 \text{ Log } (R* - 1)\Big]$$

$$\left. \Big[M_{L+} - \big(M_{L+} - A_o \text{ (Log } R* - 1)\big)\Big] \right\}$$

$$= 2\, e\, (\rho_L\, u_*)^2 \left\{ A_o\, A_1 \Big[(\text{Log } R* - 1)^2 + 1\Big] \right.$$

$$\left. + M_{L+}\, M_{g+} - A_o\, A_1\, (\text{Log } R_* - 1)^2 \right\}$$

$$= 2\, e\, (\rho_L\, u_*)^2 \Big[M_{g+}\, M_{L+} + A_o\, A_1\Big]$$

$$= 2\, e \Big[M_g\, M_L + (\rho_L\, u_*)^2\, A_o\, A_1\Big]$$

Or $\quad \rho_L\, u_*^2 = \tau_o = f\, \dfrac{M_L^2}{2\rho_L}$

$M_g = x\, M_L$

$A_1 \simeq x\, A_o$ car on a vu au paragraphe VII que $A_1 \equiv G_1 = x\, G_o \equiv x A_o$

Nous écrivons donc :

$$\int_0^{2e} m\,(x_2)\; m_g\,(x_2)\; d\,x_2 \simeq 2e \times M_L^{\,2} \left[1 + \frac{f}{2} A_o^{\,2} \right]$$

L'équation (2-8) intégrée par rapport à x_2 de 0 à 2e et divisée par 2e donne alors :

$$\frac{d\,\bar{p}}{dx_1} \left[1 - \frac{rT}{\bar{p}^2} \times M_L^{\,2} \left(1 + \frac{f}{2} A_o^{\,2}\right) \right] = - \frac{\tau_o}{e} - \rho_L g \cos\varphi \,(1 - \langle\alpha\rangle) \qquad (2\text{-}24)$$

Rappelons que :

$\bar{p}$ est la pression
x_1 est la coordonnée axiale
x est le titre massique
M_L est le débit massique du liquide par unité de surface
r est la constante des gaz parfaits
T est la température
f est le coefficient de frottement
A_o est la constante de Nikuradze égale à 2,45
τ_o est la contrainte tangentielle à la paroi
e est la demi-largeur du canal
φ est l'angle du canal avec la verticale
$\langle\alpha\rangle$ est le taux de vide surfacique.

Cette formule permet de déterminer l'évolution des pressions dans un canal où évolue le fluide diphasique. L'analyse faite précédemment a permis de connaître la forme que prend τ_o. Cette équation montre en outre l'importance de la connaissance du taux de vide surfacique. Nous traiterons donc ce sujet plus loin.

2.Remarque

La relation (2-24) peut se mettre sous la forme classique ([6] , [65] , ...) :

$$\frac{d\,\bar{p}}{d\,x_1} = \left(\frac{d\,\bar{p}}{d\,x_1}\right)_a + \left(\frac{d\,\bar{p}}{d\,x_1}\right)_f + \left(\frac{d\,\bar{p}}{d\,x_1}\right)_h$$

où $\left(\frac{d\bar{p}}{dx_1}\right)_a$, $\left(\frac{d\bar{p}}{dx_1}\right)_f$ et $\left(\frac{d\bar{p}}{dx_1}\right)_h$ désignent respectivement les variations de pression par accélération, par frottement et la variation de pression hydrostatique.

Les deux dernières ont ici les formes habituelles suivantes :

$$\left(\frac{d\bar{p}}{dx_1}\right)_f = -\frac{\tau_o}{e}$$

$$\left(\frac{d\bar{p}}{dx_1}\right)_h = -\rho_L g \cos\varphi \,(1 - \langle\alpha\rangle)$$

Par contre, la variation de pression par accélération prend dans la formule (2-24) la forme moins habituelle :

$$\left(\frac{d\bar{p}}{dx_1}\right)_a = -\,r\,T\,x\,M_L^{\,2}\,(1 + \frac{f}{2}A_o^{\,2})\,\frac{d}{dx_1}\left[\frac{1}{\bar{p}}\right]$$

Cette forme, obtenue par intégration sur la section de passage de l'écoulement de la variation locale du débit de quantité de mouvement $\overline{\rho u}\,.\,\bar{u}$, peut être comparée aux expressions usuelles, ce que nous faisons en annexe IV.

Nous évaluerons l'ordre de grandeur des termes $\left(\frac{d\bar{p}}{dx_1}\right)_a$, $\left(\frac{d\bar{p}}{dx_1}\right)_f$ et $\left(\frac{d\bar{p}}{dx_1}\right)_h$ après en avoir donné l'expression dans le cas d'un canal cylindrique de section circulaire (paragraphe IX ci-dessous).

IX. Ecoulement dans un canal cylindrique de section circulaire

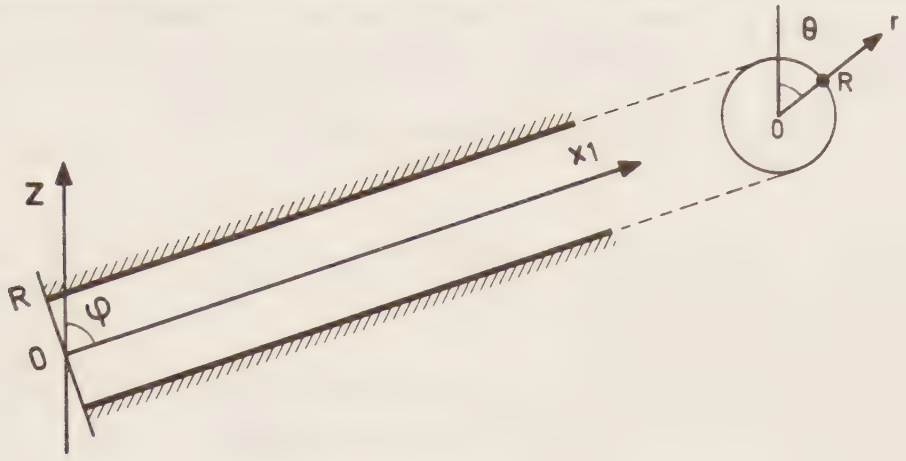


Fig.2 . 5

Nous supposerons que l'écoulement moyen est indépendant de l'angle θ (symétrie axiale). Les hypothèses faites plus haut dans l'étude de l'écoulement dans un canal de section rectangulaire allongée sont inchangées.

Les équations de conservation de la masse ont la même forme que précédemment.

$\bar{u}$ étant la composante de la vitesse le long de l'axe Ox_1 on a la relation :

$$\bar{u} = \frac{m_L(r)}{f_L} + \frac{rT\, m_g(r)}{\bar{p}} \qquad (2\text{-}25)$$

L'équation des quantités de mouvement rapportée à l'axe Ox_1 s'écrit :

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_1}\,\overline{\rho}\,\bar{u}\,\bar{u} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\, r \left[\overline{(\rho u v)'} - \frac{\partial}{\partial r}\,\overline{\mu\, u} \right] + \bar{\rho}\, g \cos\varphi = 0 \qquad (2\text{-}26)$$

On pose $$\tau = - \left[\frac{\partial}{\partial r}\,\bar{\mu}\,\bar{u} - \overline{(\rho\, u\, v)'} \right]$$

et l'on montre par une démonstration analogue à celle qui a été faite dans le paragraphe V que la contrainte tangentielle à la paroi $\tau_o = - \mu_L \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial r} \right)_{r=R}$ est une constante tout au long de l'écoulement, dans l'hypothèse où le liquide mouille la paroi.

La détermination des profils de vitesse est analogue à celle qui a été faite dans le paragraphe VI. On montre ainsi qu'il existe une loi de paroi valable quand $R* = \frac{R\,u*}{\nu_L}$ tend vers l'infini pour des valeurs de $x_{2+} = \frac{(R - r)\,u*}{\nu_L}$ petites devant R* :

$$\bar{u}_+ = f\left(x_{2+},\ \bar{p}_+,\ x,\ \frac{\mu_g}{\mu_L},\ \frac{u_*^2}{r\,T},\ \frac{g\,\nu_L}{u_*^3},\ \operatorname{tg}\varphi,\ \frac{\sigma}{\mu_L\,u_*},\ \bar{a}_+,\ \bar{a}\ h\ (a) \right)$$

et que, loin de la paroi, lorsque R_* tend vers l'infini, il existe une loi de vitesse déficitaire de la forme :

$$\bar{u}_+ - \overline{u_{m+}} = g_1\left(x'_2,\ \bar{p}_+,\ x,\ \frac{u_*^2}{r\,T},\ \frac{g\,R}{u_*^2},\ \frac{\sigma}{R\,\rho_L\,u_*^2},\ \bar{a}',\ \bar{a}\ h\ (a) \right)$$

où $x'_2 = \frac{R - r}{R}$

On en déduit qu'il existe une loi logarithmique de la vitesse moyenne valable pour

$$a\,(x_1)\ R* < x_{2+} < b\,(x_1)$$

ou $$a\,(x_1) < x'_2 < b\,(x_1)/R*$$

qui s'écrit :

$$\bar{u}_+ = A\ \mathrm{Log}\ x_{2+} + B$$

ou encore :

$$\bar{u}_+ - \overline{u_{m+}} = A\ \mathrm{Log}\ x'_2 + C$$

A, B, C ont des formes analogues à celles qui ont été mises en évidence dans le cas du canal à section rectangulaire allongée.

De même, dans la zone logarithmique, les débits massiques par unité de surface des phases ont la forme :

$$m_{L+} = A_o\ \mathrm{Log}\ x_{2+} + B_o$$

$$m_{g+} = A_1 \text{ Log } x_{2+} + B_1$$

A_o et A_1 sont fonctions des paramètres x, $\frac{u_*^2}{rT}$, tg φ et $\bar{a}$ h(a)

B_o et B_1 sont en outre fonctions des paramètres μ_g/μ_L,

$\left(\frac{g\ \nu_L}{r\ T}\right)^2$, $\frac{\sigma^2}{\mu_L^2\ rT}$, $\frac{\bar{a}^2 rT}{\nu_L^2}$

En admettant que les lois logarithmiques sont valables dans tout l'écoulement, on peut facilement calculer les vitesses débitantes et les débits massiques par unité de surface des phases :

$$\mathcal{U}_+ = \frac{\mathcal{U}}{u_*} = \frac{1}{\pi R^2} \int_0^{2\bar{u}} d\theta \int_0^R \bar{u}_+ \ r\ dr$$

$$= A \left(\text{Log } R_* - \frac{3}{2}\right) + B$$

$$M_{L+} = \frac{M_L}{\rho_L u_*} = A_o \left(\text{Log } R_* - \frac{3}{2}\right) + B_o$$

$$M_{g+} = \frac{M_g}{\rho_L u_*} = A_1 \left(\text{Log } R_* - \frac{3}{2}\right) + B_1$$

Le coefficient de frottement f est défini par

$$\tau_o = \rho_L u_*^2 = f\ \rho_L \frac{\mathcal{U}_L^2}{2}$$

D'où nous déduisons que

$$\sqrt{\frac{2}{f}} = M_{L+} = G_o\left(\pi_1, \mathcal{R}_L \sqrt{\frac{f}{2}}\right) \text{Log } R_{eL} \sqrt{\frac{f}{2}} + H_o\left(\pi_2, \mathcal{R}_L \sqrt{\frac{f}{2}}\right) \quad (2\text{-}27)$$

$$u \quad G_o \equiv A_o\left(x,\ \mathrm{tg}\,\varphi,\ \bar{a}\ h(a),\ \mathcal{M}_L\sqrt{\frac{f}{2}}\right)$$

$$H_o = B_o\left(x,\ \mathrm{tg}\,\varphi,\ \bar{a}\ h(a),\ \mathcal{M}_L\sqrt{\frac{f}{2}},\ \frac{\mu_g}{\mu_L},\ \frac{\mathcal{F}_r\mathcal{M}_L^3}{Re_L},\ Wb_L\,Re_L\,\mathcal{M}_L,\ \frac{a}{2R}\,\frac{Re_L^2}{\mathcal{M}_L}\right)$$

$$- G_o \,\mathrm{Log}\, 4$$

en posant : $Re_L = \dfrac{2R\mathcal{U}_L}{\nu_L}$, $\mathcal{F}_{r_L} = \dfrac{2Rg}{\mathcal{U}_L^2}$, $Wb_L = \dfrac{\sigma}{2R\rho_L\mathcal{U}_L^2}$, $\mathcal{M}_L = \dfrac{\mathcal{U}_L}{\sqrt{rT}}$

De la même façon que dans le § VII , on peut montrer que $x = \dfrac{G_1}{G_o} = \dfrac{H_1}{H_o}$, et on peut faire, pour les titres voisins de zéro, une approximation linéaire sur le coefficient de frottement f et la contrainte tangentielle à la paroi : $\tau_o = \tau_{oL}\,(1 + \lambda x + \varepsilon x^2)$.

Pour déterminer la variation de la pression en fonction de x_1, il faut intégrer l'équation (2-26) sur la section du canal, ce qui donne

$$\frac{d\bar{p}}{dx_1}\left[1 - \frac{rT}{\bar{p}^2}\,\frac{1}{\pi R^2}\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R m_L\, m_g\, r\, dr\right] = -\frac{2\tau_o}{R} - \langle\bar{\rho}\rangle\, g\cos\varphi$$

En admettant que les lois logarithmiques sont valables dans tout l'écoulement, on obtient alors :

$$\boxed{\frac{d\bar{p}}{dx_1}\left[1 - \frac{rT}{\bar{p}^2}\,x\,M_L^2\left(1 + \frac{5}{4}\,f\,A_o^2\right)\right] = -\frac{2\tau_o}{R} - \langle\bar{\rho}\rangle\, g\cos\varphi} \qquad (2\text{-}28)$$

Nous rappelons que $\bar{p}$ représente la pression, x_1 la coordonnée axiale, r la constante des gaz parfaits, T la température, x le titre massique, M_L le débit massique du liquide par unité de surface, f le coefficient de frottement, A_o la constante de Nikiradzé égale à 2,45, τ_o la contrainte tangentielle à la paroi, R le rayon du canal, $\langle\bar{\rho}\rangle$ la masse volumique moyenne du mélange, g l'accélération de la pesanteur et φ l'angle du canal avec la verticale.

La variation de pression par accélération a dans l'expression (2-28) la forme :

$$\left(\frac{d\,p}{d\,x_1}\right)_a = \frac{r\,T}{\overline{p}^2} \times M_L^2 \left(1 + \frac{5}{4} f A_o^2\right) \frac{d\,p}{dx_1}$$

forme que nous comparons dans l'annexe IV aux expressions plus habituellement rencontrées dans la littérature.

Nous donnons ci-dessous l'ordre de grandeur des variations de pression par accélération, par frottement et de la variation de pression hydrostatique dans un canal vertical de section circulaire dont le diamètre est égal à 2 R = 0,2 m, pour divers débits liquides ou débit gazeux de 500 Nm^3/h (les conditions normales étant une pression de 760 mm Hg et une température de 15 °C), aux pressions de 1 bar et 10 bars absolus.

Les relations utilisées sont les suivantes :

$$\left(\frac{d\,p}{d\,x_1}\right)_f = -\frac{2\,\tau_o}{R} = -\frac{2}{R} f_L (1 + 150\,x) \frac{\rho_L \mathcal{U}_L^2}{2}$$

$$\left(\frac{d\,p}{d\,x_1}\right)_h = -(1 - \langle\alpha\rangle)\,\rho_L\,g \quad \text{où} \quad \langle\alpha\rangle = \frac{x}{1{,}2\,x + \left(1{,}2 + \frac{0{,}35\,\sqrt{gD}}{\mathcal{U}_L}\right)\frac{p}{\rho_L r T}}$$

$$\left(\frac{d\,p}{d\,x_1}\right)_a = \frac{r\,T}{\overline{p}^2} \times M_L^2 \left(1 + \frac{5}{4} f A_o^2\right) \frac{dp}{dx_1}$$

$$= \frac{\frac{rT}{\overline{p}^2} \times M_L^2 \left(1 + \frac{5}{4} f A_o^2\right)}{1 - \frac{r\,T}{\overline{p}^2} \times M_L^2 \left(1 + \frac{5}{4} f A_o^2\right)} \left[\left(\frac{d\,p}{dx_1}\right)_f + \left(\frac{d\,p}{dx_1}\right)_h\right]$$

Les résultats sont groupés dans le tableau ci-dessous :

	Q_L = 250 m³/h		Q_L = 500 m³/h		Q_L = 750 m³/h	
	p=1 bar	p=10bars	p=1 bar	p=10bars	p=1 bar	p=10bars
$\left(\frac{dp}{dx_1}\right)_{f(bar/m)}$	0,0075	0,0075	0,028	0,028	0,064	0,064
$\left(\frac{dp}{dx_1}\right)_{h(bar/m)}$	0,073	0,097	0,060	0,093	0,054	0,090
$\left(\frac{dp}{dx_1}\right)_{a(bar/m)}$	0,003	≃ 0	0,024	≃ 0	0,312	≃ 0

Tableau 2 : Ordre de grandeur des diverses variations de pression pour diverses conditions de débits, titres et pressions

Nous constatons donc sur ce tableau que, pour les faibles débits liquides la variation de pression hydrostatique est très supérieure aux variations de pression par frottement ou par accélération, alors que, lorsque le débit liquide augmente, la variation de pression par frottement devient du même ordre de grandeur que la variation de pression hydrostatique. La variation de pression par accélération est négligeable aux fortes pressions et devient du même ordre de grandeur ou d'ordre supérieur aux faibles pressions (voisinage de la pression atmosphérique) lorsque le débit liquide est important.

Les résultats se maintiennent pour des débits gazeux différents.

X. Etude du taux de vide

Les relations (2-24) et (2-28) montrent l'importance de la connaissance du taux de vide surfacique dans l'évaluation des pertes de pression.

La formule (2-10) donne une relation entre le taux de vide α et le glissement local G. Adimensionnalisée, cette relation s'écrit :

$$\alpha = -\frac{G_+}{\bar{u}_+} - \frac{\bar{P}_+}{\bar{u}_+}\,\frac{\partial \bar{u}_+}{\partial \bar{P}_+}$$

Faute de connaître une relation supplémentaire entre le taux de vide et le glissement local il n'est pas possible de déterminer en chaque

point α ou G_+.

Nous n'avons point cherché à déterminer une telle relation, fonction de la configuration d'écoulement. Nous avons cependant étudié quelques cas particuliers rencontrés fréquemment, et nous avons rappelé les résultats expérimentaux cités dans la littérature.

1. Ecoulement localement homogène

C'est le cas, en première approximation, d'une émulsion à très petites bulles. Dans ce cas les vitesses moyennes du gaz et du liquide sont égales à la vitesse moyenne de l'émulsion : $\bar{u}^g = \bar{u}^L = \bar{u}$. Le glissement local est donc nul. On a alors :

$$\alpha_h = \frac{p_+}{\bar{u}_+} \frac{\partial \bar{u}_+}{\partial p_+} = \frac{r\ T}{u_*^2} \frac{m_{g_+}}{\bar{p}_+ \bar{u}_+}$$

Dans la zone logarithmique, le taux de vide a alors l'expression :

$$\alpha_h = \frac{r\ T}{u_*^2} \frac{1}{\bar{p}_+} \frac{A_1 \text{ Log } x_{2+} + B_1}{A \text{ Log } x_{2+} + B}$$

Quand $R_* \to \infty$ et $x_{2+} \to R_*$, le taux de vide tend vers sa valeur au centre de l'écoulement

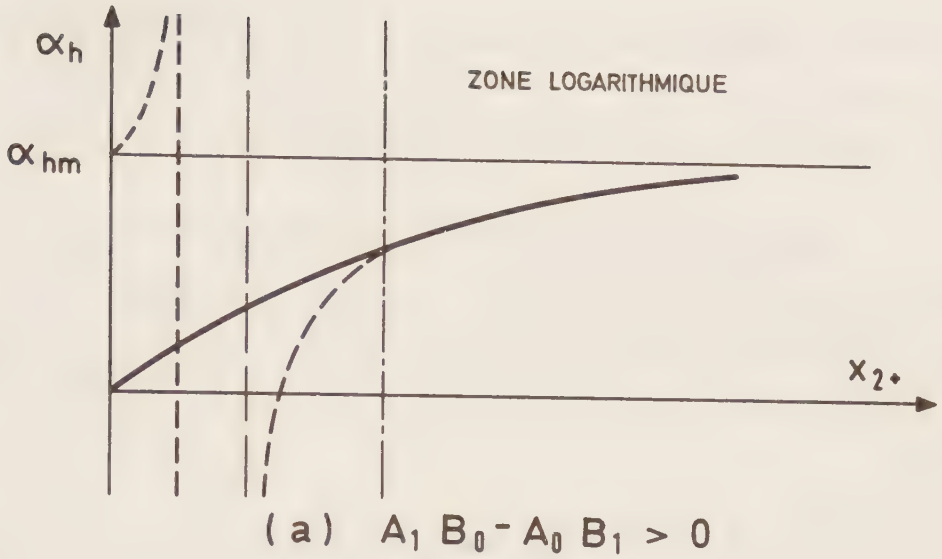
$$\alpha_h \to \alpha_{hm} = \frac{r\ T}{u_*^2} \frac{1}{\bar{p}_+} \frac{A_1}{A} = \frac{A_1}{A_o} \frac{\rho_L}{\rho_g + \frac{A_1}{A_o} \rho_L}$$

La dérivée de α_h par rapport à x_{2+} s'écrit :

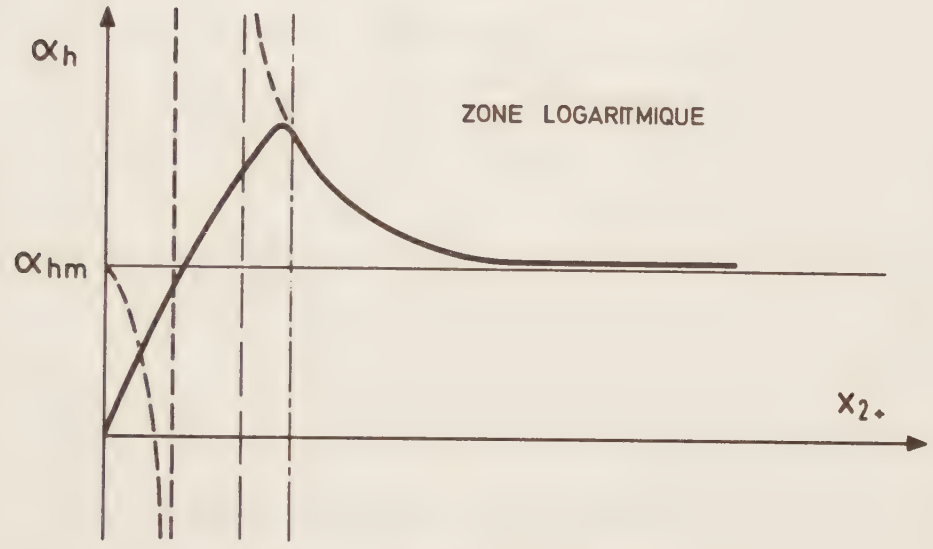
$$\frac{d\ \alpha_h}{d\ x_{2+}} = \frac{r\ T}{u_*^2} \frac{1}{\bar{p}_+} \frac{A_1 B - A\ B_1}{x_{2+} (A \text{ Log } x_{2+} + B)^2} = \frac{r\ T}{u_*^2} \frac{1}{\bar{p}_+} \frac{A_1\ B_o - A_o\ B_1}{x_{2+} (A \text{ Log } x_{2+} + B)^2}$$

$$= \frac{r\ T}{u_*^2} \frac{1}{\bar{p}_+} \frac{(A_o \text{ Log } x_{2+} + B_o)^2}{(A_1 \text{ Log } x_{2+} + B_1)^2} \frac{\partial}{\partial x_{2+}} \frac{m_{g+}}{m_{L+}}$$

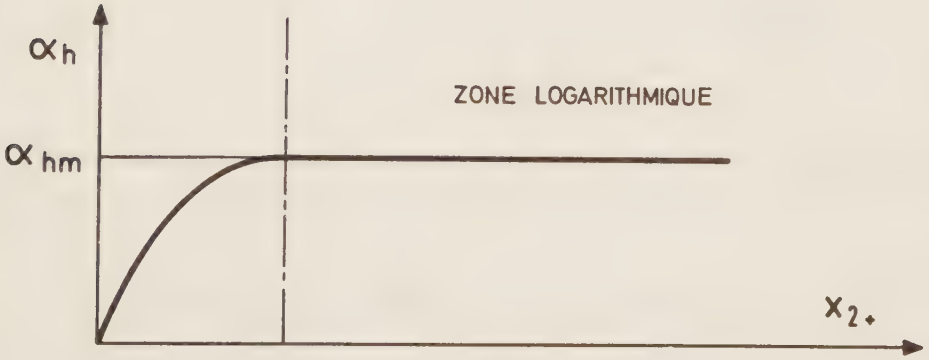
La représentation graphique de α_h est donc l'une de celles qui sont indiquées sur la figure 2-6 selon le signe de $A_1\ B_o - A_o\ B_1$, donc le signe de $\frac{\partial}{\partial x_{2+}} \frac{m_{g+}}{m_{L+}}$



(a) $A_1 B_0 - A_0 B_1 > 0$



(b) $A_1 B_0 - A_0 B_1 < 0$



(c) $A_1 B_0 - A_0 B_1 = 0$

Fig. 2.6 – Profils de α_h en écoulement homogène déduits de la connaissance des profils de vitesses et débits massiques par unité de surface

Ces représentations sont à comparer aux représentations obtenues dans le chapitre 1 (paragraphe III 4) comme conséquences du calcul du transfert moyen aux interfaces d'une grandeur f pour f = 1.

2. Glissement proportionnel au taux de vide

Nous supposons dans ce cas que la différence entre la vitesse du gaz $\bar{u}^g$ et la vitesse moyenne du mélange $\bar{u}$ est indépendante du taux de vide :

$$\bar{u}^g - \bar{u} = v_\infty$$

On a donc : $G = \alpha (\bar{u}^g - \bar{u}) = \alpha V_\infty$

α est donc solution de l'équation

$$\alpha = - \frac{\alpha V_{\infty +}}{\bar{u}_+} - \frac{\bar{p}_+}{\bar{u}_+} \frac{\partial \bar{u}_+}{\partial \bar{p}_+}$$

D'où $$\alpha = - \frac{p_+}{\bar{u}_+ + \bar{V}_{\infty +}} \frac{\partial \bar{u}_+}{\partial \bar{p}_+}$$

Deux cas particuliers peuvent être examinés :

a) Le cas où $\bar{V}_{\infty +}$ est de la même forme que $\bar{u}_+$ et lui est proportionnel : $\bar{V}_{\infty +} = \lambda \bar{u}_+$

On a alors : $$\alpha = - \frac{\bar{p}_+}{(\lambda + 1) \bar{u}_+} \frac{\partial \bar{u}_+}{\partial \bar{p}_+} = \frac{\alpha h}{\lambda + 1}$$

Les représentations graphiques du taux de vide sont alors analogues à celles de la figure (2-6)

b) Le cas où V_∞ est une constante.

Ce cas est très important. En effet, si l'on se réfère à ZUBER et FINDLAY [33] , c'est le cas d'un écoulement à bouchons, où l'on néglige les effets visqueux (donc écoulement turbulent) :

$$\bar{V}_\infty = \bar{u}^g - \bar{u} = 0,35 \left[\frac{g (\rho_L - \rho_g) D}{\rho_L} \right]^{1/2}$$ où D est le diamètre du canal de section circulaire étudié.

C'est aussi le cas en régime à bulles, où

$$\bar{V}_\infty = \bar{u}^g - \bar{u} = 1{,}53 \left(\sigma g \frac{\rho_L - \rho_g}{\rho_L^2} \right)^{1/4}$$

le coefficient 1,53 étant donné par HARMATHY [66] alors que PEEBLES et GARBER [67] ont trouvé 1,18.

Le taux de vide surfacique est obtenu en intégrant α .

Or $$\alpha = - \frac{\bar{p}_+}{\bar{u}_+ + V_{\infty+}} \frac{\partial \bar{u}_+}{\partial \bar{p}_+} = \frac{\alpha \bar{u}_+^g}{\bar{u}_+ + V_{\infty+}}$$

On en déduit que $$\langle \alpha \bar{u}^g \rangle = \langle \alpha \bar{u}_+ \rangle + \langle \alpha \rangle V_\infty$$

$$= \langle \alpha \rangle (C_o \langle \bar{u} \rangle + V_\infty)$$

où $$C_o = \frac{\langle \alpha \bar{u} \rangle}{\langle \alpha \rangle \langle u \rangle}$$ (qui est l'inverse du "facteur de Bankoff [34] ").

La connaissance du profil de $\bar{u}_+$ et celle de $\alpha \bar{u}_+^g$ permet ici de calculer C_o.

En effet :

$$\langle \alpha \rangle = \left\langle \frac{\alpha \bar{u}_+^g}{\bar{u}_+ + V_\infty} \right\rangle$$

$$\langle \alpha \bar{u} \rangle = \langle \alpha \bar{u}^g \rangle - V_\infty \langle \alpha \rangle = \langle \alpha \bar{u}^g \rangle - V_\infty \left\langle \frac{\alpha \bar{u}^g}{\bar{u}_+ + V_\infty} \right\rangle$$

Donc $$C_o = \frac{\langle \alpha \bar{u}^g \rangle - V_\infty \left\langle \frac{\alpha \bar{u}^g}{\bar{u} + V_\infty} \right\rangle}{\left\langle \frac{\alpha \bar{u}^g}{\bar{u} + V_\infty} \right\rangle \langle \bar{u} \rangle}$$

$$C_o = \frac{\langle \alpha \bar{u}^g \rangle}{\left\langle \frac{\alpha \bar{u}^g}{\bar{u} + V_\infty} \right\rangle \langle u \rangle} - \frac{V_\infty}{\langle \bar{u} \rangle}$$

Ces résultats sont très importants dans la pratique.

Les représentations graphiques du profil de taux de vide sont analogues à celles de la figure (2-6). En effet, si l'on remplace B par $B + V_{\infty+}$, on voit que α prend la même forme que α_h. C'est alors le signe de $A_1 (B_o + V_{\infty+}) - A_o B_1$ qui indique laquelle des trois représentations de la figure (2-6) est celle de α.

XI. Conclusion - Domaine de validité de la théorie

1. La méthode de [52] appliquée aux équations de conservation des fluides diphasiques au sens des distributions nous a permis de déterminer les profils des vitesses en écoulement turbulent. Nous en avons déduit le coefficient de frottement, dont nous avonsmontré la constance en dehors des discontinuités de pression lorsque le liquide est la seule phase présente à la paroi. Ce coefficient de frottement est relié au nombre de Reynolds Re_L par une formule analogue à celle de Karman-Nikuradzé. Les coefficients qui interviennent sont fonctions des paramètres de similitude mis en évidence. Nous en avons déduit l'expression des pertes de pression dans un canal de section constante.

2. Le domaine de validité de la théorie que nous avons présentée ci-dessus ne peut, en toute rigueur, être connu qu'expérimentalement. Cependant, il est possible de déterminer un domaine minimal de validité en se basant sur les résultats des écoulements monophasiques. En effet, la présence des deux phases favorisant la turbulence, il est évident que si, dans un canal donné, l'écoulement du liquide seul de même débit est turbulent, l'écoulement diphasique sera également turbulent. Le nombre de Reynolds liquide critique de l'écoulement diphasique est donc nécessairement inférieur ou égal au nombre de Reynolds critique de l'écoulement du liquide seul de même débit :

$$(Re_{Lc})_{\text{diphasique}} \leq (Re_{Lc})_{\text{liquide seul de même débit}}$$

Ceci permet d'écrire en outre que les limites d'existence des lois logarithmiques $a(x_1)$ et $b(x_1)$ sont respectivement inférieure ou égale et supérieure ou égale aux limites homologues a et b en écoulement du liquide seul de même débit.

On a donc :

$$a(x_1) \leq \frac{30}{R_*} \quad \text{et} \quad b(x_1) \geq 0,2\ R_*$$

3. La théorie présentée ci-dessus ne rend pas contradictoires des profils de vitesse moyenne logarithmiques avec des profils de taux de vide tels que ceux qui sont représentés sur la figure 2-6, profils que l'on trouve expérimentalement.

DEUXIEME PARTIE

ETUDE EXPERIMENTALE DE L'INTERACTION D'UNE BULLE D'AIR AVEC UNE SONDE A VARIATION D'IMPEDANCE

- - - -

INTRODUCTION

Pour qu'on puisse utiliser, au calcul d'engins à émulsion, les équations présentées dans le premier chapitre de la première partie, il est nécessaire de les simplifier sur la base d'hypothèses justifiées par une étude expérimentale

- soit en comparant a postériori des résultats théoriques et expérimentaux, comme nous l'avons fait.

- soit a priori, en montrant, à l'aide de mesures locales, que certains termes peuvent être négligés. Ces mesures, précisant la structure des émulsions, telles qu'elles apparaissent dans leurs diverses configurations, peuvent également orienter les recherches théoriques.

C'est pour ces raisons que, depuis une trentaine d'années, un effort important a été fourni pour déterminer et perfectionner la métrologie diphasique.

On trouvera dans [71], [72] et [73] l'état de cette métrologie en 1973. Les instruments évoqués dans ces ouvrages reposent sur quelques principes simples. Ils continuent à faire l'objet d'améliorations technologiques.

Ainsi, la sonde à variation d'impédance, conçue et mise au point par H. LECROART et R. PORTE [60] au Centre d'Etudes Nucléaires de Saclay, permet, par sa forme, sa technologie et son électronique associée, de réaliser, avec une précision et une fiabilité remarquable, la mesure locale du taux de vide dans les écoulements à grande vitesse ($V \leq 50$ m/s). En outre, une sonde à deux antennes (ou bisonde) permet d'atteindre une vitesse moyenne caractéristique de l'émulsion, celle des interfaces.

Enfin, la structure géométrique locale de l'émulsion (granulométrie) peut être déduite, après interprétation statistique, des résultats que fournit un appareillage électronique approprié en aval de la sonde.

Cependant, afin de garantir la justesse des mesures réalisées grâce à la sonde à variation d'impédance, il est nécessaire de s'assurer que celle-ci ne perturbe pas l'écoulement dans lequel elle est introduite et, en particulier, qu'elle ne déforme pas les bulles qui viennent s'y empaler.

Dans ce but, nous avons cherché à visualiser l'interaction des bulles avec la sonde.

Cette visualisation est elle-même rendue difficile par le fait que le mélange diphasique d'aspect laiteux, diffuse considérablement dès que la concentration en bulles s'accroît à l'excès : il devient alors impossible d'utiliser les moyens de l'optique classique pour voir au travers de ce mélange.

Trois expériences ont été réalisées :

a) l'expérience "I.B.S." a permis de visualiser l'impact bulle-sonde mais aussi, grâce à la mise en oeuvre d'un dispositif de détection des bulles, la forme que prennent celles-ci avant cet impact.

Nous nous sommes restreints, dans cette expérience, au cas d'une émulsion de faible taux de vide ($\alpha \leqslant 0{,}02$). On sait que dans ce cas les bulles ne réagissent pas entre elles : l'étude de l'interaction bulle-sonde n'est donc pas compliquée par des impacts entre bulles. Il est cependant probable que la forme des bulles n'est pas la même dans ce cas que dans celui d'une émulsion à fort taux de vide. Toutefois, dans la mesure où seules les déformations nous intéressent, cette restriction est peu gênante. Cette expérience a été montée à Saclay. Une grande partie du matériel optique, fort délicat et onéreux, a été emprunté à diverses sources.

b) L'expérience "HOLOGRAPHIE" a été réalisée à l'Institut Franco-Allemand de Saint-Louis, avec la participation des membres du Département d'Optique de cet organisme.

Vu le temps limité - une semaine - qui nous était imparti, nous n'avons pas cherché à approfondir l'étude de l'impact bulle-sonde mais uniquement à tester les possibilités d'application, à la visualisation en écoulement diphasique, de l'optique cohérente.

c) L'expérience "V.E.E." a permis, après le calcul d'un objectif spécial, de visualiser avec un grossissement très fort ($g \simeq 80$) l'impact des bulles sur la sonde. Elle a permis en outre de déterminer jusqu'à quel taux de vide la visualisation était possible en utilisant l'optique classique. Enfin nous avons repéré sur les signaux délivrés par la sonde les instants où étaient prises les photographies.

Cette expérience a été réalisée à Saclay avec la collaboration de la Division d'optique de l'ONERA.

*
* *
*

Notre propos est de décrire ci-dessous ces expériences et de rapporter les résultats qu'elles ont permis d'obtenir.

Dans le troisième chapitre, nous rappelons le principe de fonctionnement de la sonde à variation d'impédance et montrons comment une interprétation statistique des résultats permet de déduire la structure locale de l'émulsion.

Les quatrième, cinquième et sixième chapitres sont consacrés aux comptes-rendus des expériences "I.B.S.", "HOLOGRAPHIE" et "V.E.E.".

En conclusion, nous ferons la synthèse des résultats acquis.

Les figures relatives à cette partie sont regroupées à la fin du texte.

CHAPITRE 3

RAPPEL DU FONCTIONNEMENT DE LA SONDE A VARIATION D'IMPEDANCE

I. Fonctionnement des sondes et traitement du signal

La sonde à variation d'impédance, schématisée sur la figure 4-1 et photographiée sur la figure 4-2, consiste, pour la partie sensible, en une extrémité très ténue de fil de tungstène en contact avec l'émulsion, le reste du fil étant isolé et protégé par un support métallique, en acier.

Cette partie, de 5 à 20 μ de diamètre et de 15 à 50 μ de longueur, est située à l'extrémité d'un cône afin de ne pas perturber sensiblement l'écoulement.

Les changements de phase qui se produisent à l'extrémité de la sonde provoquent des variations d'impédance que l'on transforme en signaux électriques. Ces signaux sont obtenus sans déformation par un amplificateur opérationnel qui maintient une DDP constante (appelée tension de consigne) entre la pointe de la sonde et l'eau et fournit le courant nécessaire. C'est une tension électrique, image de ce courant, qui constitue le signal utile. Le diagramme du circuit de détection est représenté sur la figure 4-3.

La forme des signaux reçus (figure 4-4) est représentée schématiquement sur la figure 4-5 a. Ces signaux n'ont pas la forme idéale de signaux rectangulaires d'amplitude constante, dont la largeur serait égale au temps pendant lequel la partie active de la sonde serait dans la bulle (figure 4-5 b).

La forme des signaux réels est due :

- aux temps de réponse de l'électronique ;

- aux déformations éventuelles des bulles sur la sonde.

Pour les ramener à la forme idéale, et donc pour permettre un traitement statistique, il est nécessaire de faire subir à ces signaux un traitement électronique : un seuil est positionné de telle sorte que l'on admet que :

- au-dessus de ce seuil, les signaux sont représentatifs de la présence du liquide ;

- au-dessous de ce seuil, ils sont représentatifs de la présence du gaz.

Le seuil est positionné par comparaison des résultats obtenus grâce à la sonde (profil du taux de vide, donc, par intégration, taux de vide surfacique) aux résultats obtenus par une autre méthode (absorption par rayons γ ou X ([71], [74].))

Grâce à un appareillage électronique approprié (échelles de comptage, convertisseurs temps-adresse, bloc mémoire...) on peut obtenir les fonctions et histogrammes suivants :

- taux de vide par lecture directe sur des échelles de comptage (diagramme de la figure 4-6)

- histogrammes des temps de passage du gaz ou du liquide

En normant ces histogrammes, on obtient les fonctions densité de probabilité du temps de passage du gaz ou du liquide sur la sonde.

- histogramme d'amplitude du signal (figure 4-7)

- fonction d'autocorrélation du signal (figure 4-8)

- spectre de fréquence (figure 4-8)

La bisonde (figure 4-9) est constituée de deux extrémités sensibles, distantes de 1 mm environ, émergeant d'un même support métallique. La mesure de la vitesse moyenne des interfaces est réalisée par l'intercorrélation des signaux délivrés par chacune des extrémités, comme nous le montrerons plus loin. Il est intéressant de déterminer également l'histogramme des intervalles de temps entre l'arrivée ou le départ d'une bulle sur l'antenne amont, et l'arrivée ou le départ de toutes les bulles sur l'antenne aval, pendant une durée déterminée.

La détermination du taux de vide et de la vitesse moyenne des interfaces n'épuise pas les renseignements contenus dans les

histogrammes et les corrélogrammes. Ainsi l'interprétation statistique de certains de ces résultats [75], [76], permet, sous certaines hypothèses de mieux connaître la structure du milieu diphasique.

II. Structure locale de l'émulsion

1. Définitions et hypothèses

Nous avons cherché à déterminer à partir des histogrammes expérimentaux, la structure locale d'une émulsion, définie pour des conditions initiales et limites spécifiques (type de l'émulseur, débits de chacune des phases, pressions et températures d'entrée, forme de la tuyère...).

On pourra considérer cette structure comme connue si l'on détermine en chaque point :

- le taux de vide α
- la granulométrie des bulles, définie par la fonction densité de probabilité des diamètres de bulles h(D)
- la "granulométrie" du liquide (distance entre centres de bulles)
- les vitesses de chaque phase et des interfaces.

La connaissance de ces grandeurs peut permettre de simplifier les équations générales en précisant les termes de corrélation qui interviennent.

Ainsi, si $G_g(V)$ est la fonction densité de probabilité de vitesse du gaz, on pourra écrire que :

$$\overline{V^2} = \int V^2 G_g(V)\, dV = C_{V2}\, \overline{V}^2 = C_{V2} \left[\int V G_g(V)\, d V \right]^2$$

où C_{V2} est défini par :

$$C_{V2} = \int V^2 G_g(V)\, d V \Big/ \left[\int V G_g(V)\, d V \right]^2$$

Le taux de vide peut être atteint directement, sans hypothèses particulières, comme nous l'avons vu ci-dessus.

Pour déterminer les autres fonctions statistiques, nous

avons fait les hypothèses suivantes :

- l'écoulement est stationnaire en moyenne

- les bulles sont sphériques de diamètre D

- les vitesses du gaz, du liquide et des interfaces sont égales entre elles au point de mesure : nous négligeons ainsi les transferts de masse, et supposons qu'il n'y a pas de glissement local entre phases.

- il n'y a pas de déformation de l'élément de volume vu localement par la sonde, ou par la bisonde.

- il y a isotropie locale en moyenne au voisinage de la sonde (ce qui revient à supposer que la probabilité pour qu'un centre de bulle soit dans l'élément de surface rdrdθ perpendiculaire à la direction de l'écoulement, est proportionnel à rdrdθ.)

Nous avons donc cherché à déterminer des relations liant les fonctions expérimentales :

- $f_{tg}(t)$: densité de probabilité du temps de passage d'une bulle sur la sonde ;

- $f_{tl}(t)$: densité de probabilité du temps de passage du liquide entre bulles sur la sonde ;

- $f_{\Delta t}(t)$: densité de probabilité de l'intervalle de temps entre le départ d'une bulle sur la sonde amont et le départ des bulles sur la sonde aval, dans le cas de la bisonde ;

aux fonctions suivantes :

- $h(D)$: fonction densité de probabilité du diamètre D des bulles ;

- $f_{\Delta x}(x)$: fonction densité de probabilité de l'intervalle entre les abscisses de deux centres de bulles successives ;

- $G(V)$: fonction densité de probabilité de la vitesse V des interfaces (donc du gaz et du liquide) ;

- $g(V, D)$: fonction densité de probabilité liant vitesse et diamètre des bulles, et définie par :

$$g(V, D) = \text{Probabilité} \left\{ V \in \left[V,\ V + d\,V \right] \Big/ D \in \left[D,\ D + d\,D \right] \right\} .$$

Nous nous bornons ici à donner le principe et les résultats des calculs développés dans [75] .

2. Relation liant $f_{tg}(t)$, $h(D)$ et $g(V, D)$

En écrivant que le temps de passage du gaz sur la sonde est égal à $tg = \sqrt{D^2 - 4r^2} / V$, où r est la distance du centre de la bulle à la droite passant par la sonde et parallèle à la vitesse (figure 4-10 a) nous relions la granulométrie h(D) à la fonction densité de probabilité des temps de passage du gaz $f_{tg}(t)$.

En effet, par définition :

$$f_{tg}(t) = \frac{d}{dt} \text{ Prob } \{ tg < t \} = \frac{d}{dt} \int_{D_{tg}} \text{Prob } (r, \theta, D, V)\, r\, dr\, d\theta\, dD\, dV$$

dans le domaine D_{tg} de l'espace de (r, θ, D, V) défini par

$$\begin{cases} tg = \sqrt{D^2 - 4r^2} / V \leqslant t \\ 0 < \theta < 2\pi \end{cases}$$

Les résultats du calcul sont résumés dans le tableau 4-I ci-dessous; Ils font apparaître deux cas distingués par les valeurs respectives des rapports $\frac{D_{min}}{V_{min}}$ et $\frac{D_{max}}{V_{max}}$

t	cas où = $\frac{D\,mini}{V\,mini} < \frac{D\,max}{V\,max}$	t	cas où = $\frac{D\,mini}{V\,mini} > \frac{D\,max}{V\,max}$
0		0	
Dmini / Vmax	$\frac{\pi \rho_0}{2} \overline{V^2} t$	Dmini / Vmax	$\frac{\pi \rho_0}{2} \overline{V^2} t$
Dmini / Vmini	$\frac{\pi \rho_0}{2} t \left[\overline{V^2} - \int_{D\,mini}^{V\,max\,t} h(D) \int_{D/t}^{V\,max} V^2 g(V,D)\, dV\, dD \right]$	Dmax / Vmax	$\frac{\pi \rho_0}{2} t \left[\overline{V^2} - \int_{D\,mini}^{V\,max\,t} h(D) \int_{D/t}^{V\,max} V^2 g(V,D)\, dV\, dD \right]$
Dmax / Vmini	$\frac{\pi \rho_0}{2} t \left[\int_{V\,mini\,t}^{V\,max\,t} h(D) \int_{V\,mini}^{D/t} V^2 g(V,D)\, dV\, dD + \int_{V\,max}^{D\,max} h(D) \int_{V\,mini}^{V\,max} V_g^2(V_0)\, dV\, dD \right]$	Dmax / Vmax	$\frac{\pi \rho_0}{2} t \int_{D\,mini}^{D\,max} h(D) \int_{V\,mini}^{D/t} V^2 g(V,D)\, dV\, dD$
Dmax / Vmax	$\frac{\pi \rho_0}{2} t \int_{V\,mini\,t}^{D\,max} h(D) \int_{V\,mini}^{D/t} V^2 g(V,D)\, dV\, dD$	Dmax / Vmini	$\frac{\pi \rho_0}{2} t \int_{V\,mini\,t}^{D\,max} h(D) \int_{V\,mini}^{D/t} V^2 g(V,D)\, dV\, dD$
Dmax / Vmini	0	Dmax / Vmini	0

Tableau 4-I

Dans le cas où existe une relation entre la vitesse et le diamètre de la bulle de la forme $V = V(D)$, (incluant le cas où $V = \text{cste} = V_o$), on peut simplifier les résultats en remarquant que la probabilité conditionnelle $g(V, D)$ s'exprime à l'aide de la fonction de Dirac δ par la formule

$$g(V, D) = \delta\left[V - V(D) \right]$$

On obtient alors :

- pour $0 < t < \left[\frac{D}{V(D)}\right]_{min}$: $f_{tg}(t) = \frac{\pi \varphi_o}{2} t \overline{V(D)^2}$

- pour $\left[\frac{D}{V(D)}\right]_{min} < t < \left[\frac{D}{V(D)}\right]_{max}$: $f_{tg}(t) = \frac{\pi \varphi_o}{2} t \int_{D_o(t)}^{D_{max}} V^2(D)\, h(D)\, dD$

où $D_o(t)$ est solution de l'équation en D :

$D - t\, V(D) = 0$

- pour $t > \left[\frac{D}{V(D)}\right]_{max}$: $f_{tg}(t) = 0$

Dans ce cas, il est facile d'expliciter $h(D)$ et l'on obtient :

- pour $0 < D < D_{min}$ et $D > D_{max}$: $h(D) = 0$

- pour $D_{min} < D < D_{max}$: $h(D) = -\frac{2}{\pi \varphi_o} \frac{1}{V^2(D)} \frac{d}{dD} \left\{ \frac{V(D)}{D} f_{tg}\left(\frac{D}{V(D)} \right) \right\}$

La constante φ_o qui intervient dans les divers résultats ci-dessus est égale à $4/\pi \overline{D^2}$, ce que l'on déduit de l'écriture de l'identité $\int_o^\infty f_{tg}(t)\, dt = 1$

Par ailleurs la moyenne du temps de passage du gaz est égale à : $\overline{tg} = \int_o^\infty t\, f_{tg}(t)\, dt = \frac{2}{3\, \overline{D^2}} \left(\overline{\frac{D^3}{V}} \right)$

3. Relation entre $f_{\Delta x}(X)$, $G(V)$, $f_{tg}(t)$ et $f_{tl}(t)$

De la meme façon, si ΔX est la distance entre deux centres de bulles (voir figure 4-10 b), on peut écrire que :

$$\Delta X = V \left| t_1 + \frac{1}{2} (tg_1 + tg_2) \right|$$

La fonction densité de probabilité associée à ΔX se calcule selon la même méthode que précédemment. On obtient :

$$f_{\Delta X}(X) = \int_{V_{min}}^{V_{max}} \frac{4}{V} G(V) \int_o^X f_{tl}\, t_1) \int_o^{\frac{X}{V} t_1} f_{tg}(2\, t_2)\, f_{tg}$$

$$\left[2 \left(\frac{X}{V} - t_1 - t_2 \right) \right] dt_2\, dt_1\, d\, V$$

D'où l'on déduit que :

$$\overline{X} = \overline{V} \left(\overline{tg} + \overline{t_1} \right)$$

Le taux de vide, défini par $\alpha = \dfrac{\overline{tg}}{\overline{tg} + \overline{t_1}}$, prend alors une une expression simple en fonction des caractéristiques granulométriques de l'émulsion :

$$\alpha = \frac{2}{3} \frac{\overline{V}}{\overline{D^2}\ \overline{X}} \left(\overline{\frac{D^3}{V}} \right)$$

4. Relation entre $G(V)$, $f_{\Delta t}(t)$, $f_{tg}(t)$, $f_{tl}(t)$ et $f_{\Delta X}(X)$

On peut déterminer la fonction densité de probabilité des vitesses à partir de l'histogramme des intervalles de temps entre le passage d'une bulle sur la sonde amont de la bisonde et celui de toutes les bulles sur la sonde aval pendant un temps prédéterminé, soit, après norme $f_{\Delta t}(t)$.

Nous donnons ici le principe du calcul, illustré par la figure (4-10 c).

Soient deux bulles successives j-1 et j, et Δtj l'intervalle de temps entre le temps origine où la bulle K quitte la sonde amont en déclenchant l'échelle de comptage, et le moment où la bulle j quitte la sonde aval.

Nous avons la relation $\Delta tj = \Delta t_{j-1} + tg_j + tl_j$. Soit $f_{\Delta tj}$ la fonction densité de probabilité de Δtj. Δtj, tg et t_l étant trois variables aléatoires indépendantes, leurs fonctions densités sont liées par la relation

$$f_{\Delta tj}(t) = f_{\Delta t_{j-1}}(t) * f_{tg}(t) * f_{tl}(t)$$

où le signe * représente un produit de convolution.

Par récurrence :

$$f_{\Delta tj}(t) = \underbrace{\left[f_{tg}(t) * f_{tl}(t)\right] * \ldots * \left[f_{tg}(t) * f_{tl}(t)\right]}_{(j-k) \text{ fois}} * f_{\Delta t}(t)$$

Les produits de convolution étant de maniement complexe, il est intéressant de passer par la transformée de Fourier des fonctions qui interviennent.

Soit $F_I(w)$ la transformée de Fourier de $f_I(t)$ où I est un indice quelconque.

On obtient :

$$f_{\Delta tj}(t) = F^{-1}_{\Delta tj}\left[\frac{F_{\Delta t_K}(w)}{(F_{tg}(w) \cdot F_{tl}(w)^{k-j}}\right] \qquad (1)$$

Si Δt_k correspond à la bulle ayant quitté la sonde amont à l'instant t = O, on a nécessairement $\Delta t_K = \frac{1}{V}$.

Cependant le temps Δt mesuré peut correspondre à la bulle d'indice O, 1, ... ou K, ou ... : ce qui s'exprime par la relation d'exclusion :

$$\Delta t = \Delta t_o \text{ ou } \Delta t_1 \text{ ou } \ldots \text{ ou } \Delta t_K \text{ ou } \ldots$$

Les densités de probabilités sont alors liées par :

$$f_{\Delta t}(t) = \sum_{j=o}^{\infty} f_{\Delta tj}(t) - \sum_{\substack{j=o \\ k<j}}^{\infty} f_{\Delta tj}(t)\ f_{\Delta t_K}(t) \qquad (2)$$

Des relations (1) et (2) on déduit :

$$f_{\Delta t_K}(t) = \Psi_K\left[f_{\Delta t}(t), f_{tg}(t), f_{tl}(t)\right]$$

Et :

$$G(V) = \frac{d}{dv} \text{Prob } (V < v) = \sum_{K=o}^{\infty} \left[\frac{d}{dv} \text{Prob } \left(\frac{1}{\Delta t_K} < v \right) \cdot P\ (K,\ 1) \right]$$

où P(K, 1) est la probabilité pour que la $K^{ième}$ bulle soit celle qui a déclenché le processus. On montre que, dans certaines hypothèses :

$$P(K,\ 1) = \frac{\left[F_{\Delta X}(1)\right]^K}{K!} e^{-F_{\Delta X}(1)}$$

D'où :

$$G(V) = \frac{1}{V^2} \sum_{K=o}^{\infty} \Psi_K \left[f_{\Delta t}(t),\ f_{tg}(t)\ f_{tl}(t) \right] \frac{\left[F_{\Delta X}(1) \right]^K}{K!} e^{-F_{\Delta X}(1)}$$

$F_{\Delta X}(1)$ est l'intégrale de la fonction $f_{\Delta X}(X)$:

$$F_{\Delta X}(1) = \int_o^1 f_{\Delta X}(x)\, dx$$

5. Vitesse moyenne de l'écoulement

Le calcul précédent permet de déterminer la vitesse moyenne de l'écoulement, par la relation : $\bar{V} = \int V\, G\, (V)\, d\, V$

Le calcul de G(V) est cependant extrêmement difficile, et nécessite la mise en oeuvre de moyens de calcul puissants (calcul machine).

Il est possible de déterminer plus simplement la vitesse moyenne de l'émulsion en interprétant l'intercorrélation des signaux des sondes amont et aval [77].

Soient X(t) et Y(t) les signaux délivrés sur les sondes amont et aval. Pour $\tau = 1/V_m$, où 1 est la distance entre les sondes, et V_m la vitesse moyenne, la variance $\overline{\left[X(t) - Y(t+\tau)\right]^2}$ doit être minimale.

$$\text{Or } \overline{X(t)^2} = \overline{X(t)} = \alpha$$

$$\overline{Y(t+\tau)^2} = \overline{Y(t)} = \alpha$$

On en déduit que

$$\frac{d}{d\tau} \left[X(t)\ Y(t+\tau) \right] = \frac{d}{d\tau} C_{XY}(\tau) = 0 \quad \text{pour} \quad \tau = \frac{1}{V_m}$$

Le maximum de l'intercorrélation $C_{xy}(\tau) = 0$ correspond donc au temps $\tau_m = \frac{1}{V_m}$. La détermination de V_m est donc immédiate.

III. Conclusion

Grâce à la sonde et à la bisonde à variation d'impédance, le taux de vide et la vitesse moyenne peuvent être mesurés localement avec une bonne précision. Les profils de ces grandeurs peuvent être tracés dans des sections normales à l'écoulement moyen, comme le montre la figure 4-11 [60].

Par ailleurs, une interprétation statistique des résultats conduit à la connaissance de la structure locale de l'écoulement diphasique. La sonde à variation d'impédance constitue donc un instrument de mesure extrêmement intéressant pour une meilleure connaissance des écoulements à deux phases. Nous allons montrer ci-dessous quelle est l'importance des perturbations qu'elle créé dans l'écoulement.

CHAPITRE 4

EXPERIENCE I.B.S.

L'expérience I.B.S. (Interaction Bulle-Sonde) est la première des trois expériences de visualisation en émulsion que nous avons réalisées.

Elle a permis d'étudier l'impact bulle-sonde, mais aussi, grâce à la mise en oeuvre d'un dispositif de détection des bulles, la forme que prennent celles-ci au voisinage de la sonde.

Pour éviter les perturbations liées à la diffusion de la lumière dans une émulsion à fort taux de vide, nous avons limité ce dernier à des valeurs extrêmement faibles ($\alpha \leqslant 0{,}02$). Ce sont donc des bulles "isolées" que nous avons photographiées.

L'expérience I.B.S. s'est étendue sur une période de quatre ans. Le dessin, la réalisation et le montage ont duré de mars 1971 à novembre 1972. Les mises au point et essais ont débuté en décembre 1972 et se sont terminés en octobre 1974. Ces essais ont été interrompus à plusieurs reprises, pour des temps plus ou moins longs, et pour des raisons diverses que nous évoquerons plus loin (l'absence, par exemple, de la disponibilité permanente d'un matériel emprunté en grande partie).

Tous les résultats escomptés de cette expérience n'ont pas été atteints.

Certains effets, en marge de nos préoccupations initiales, ont, par contre, été mis en évidence.

Nous décrivons ci-dessous l'installation et l'instrumentation qui ont été mises en oeuvre, les problèmes qui se sont posés tout au long de l'expérimentation et les résultats que nous avons obtenus.

I. Installation d'essai

1. Description d'ensemble

Le schéma de principe de l'installation est représenté sur la figure 5-1. Une vue d'ensemble en est donnée sur la photographie de la figure 5-2.

Certaines difficultés, rencontrées en cours des essais, et dont nous parlerons plus loin, nous ont amené à apporter quelques modifications à l'intallation telle qu'elle avait été conçue à l'origine. C'est sa forme définitive que nous présentons ci-dessous.

L'installation est verticale. Pour des raisons d'encombrement général du laboratoire, elle a été disposée sur trois niveaux. Sa hauteur totale est de 7 mètres.

En suivant l'écoulement, le circuit comprend successivement :

- au niveau inférieur (sous-sol du bâtiment) la vanne d'entrée V_1, le débitmètre à eau et une purge.

- au niveau intermédiaire (rez-de-chaussée du bâtiment) la vanne intermédiaire V_2 et l'entrée d'air (émulseur).

A ce niveau se trouve l'armoire de contrôle des débits d'eau et d'air injectés dans la boucle. Par manque de place, le tube de visualisation et les appareils de mesure n'ont pu être placés à ce niveau.

- au niveau supérieur (plate-forme d'expérimentation) : le canal d'essai, la vanne de sortie V_3, un dispositif antivibratoire et la cuve de sortie dans laquelle a été disposé un brise-jet.

La section de visualisation, en verre, est de section carrée. En amont et en aval de celle-ci, après des zones de tranquillisation,des convergents, avec changement de forme, assurent le passage des tubes de section circulaire aux tubes de section carrée.

A l'exception du tube de visualisation, en verre, les tuyauteries ont été réalisées en acier inoxydable.

L'eau utilisée est filtrée après introduction dans l'installation.

Nous détaillons ci-dessous les caractéristiques des différents éléments de la boucle.

2. Alimentation en eau

Le laboratoire dispose, pour ses besoins en eau, de deux possibilités :

- le réseau général du centre de Saclay, qui peut fournir un débit maximal de 20 m^3/h sous une pression de 3 bars en amont des expériences.

- une installation propre qui permet d'obtenir un débit maximal de 60 m^3/h sous une pression amont maximale de 12 bars, et qui fonctionne de la façon suivante :

En amont des circuits expérimentaux, l'eau, stockée dans un ballon de 3 m^3, est maintenue à une pression constante (pression maximale : 12 bars) par l'air issu d'un compresseur axial à trois étages, et par un jeu de vannes pneumatiques régulées automatiquement. Dans ce ballon, l'air est directement au contact de l'eau.

Lorsqu'une expérience est en fonctionnement, le débit d'eau et la pression dans le ballon sont commandés par vannage pneumatique. Le ballon a pour rôle de réguler le débit affiché. En sortie de l'expérience, l'eau est évacuée dans une bache alimentaire à la pression atmosphérique. Lorsque l'eau atteint un niveau bas dans le ballon, une pompe, d'une puissance de 12 kW refoule automatiquement dans celui-ci l'eau accumulée dans la bache alimentaire.

Toute expérience utilisant cette installation fait donc partie d'un circuit fermé avec recyclage périodique de l'eau en amont.

Cette installation présente certains inconvénients :

- Plusieurs expériences ne peuvent fonctionner simultanément

- En raison de l'évaporation de l'eau dans la bache alimentaire, des fuites inévitables dans les installations expérimentales et des purges de celles-ci sans récupération de l'eau dans le circuit, le volume total d'eau qui cycle dans l'installation diminue jusqu'à ce que le niveau de remplissage maximal coïncide avec le niveau bas dans le ballon de régulation. L'air sous pression débouche alors dans l'installation expérimentale en fonctionnement, créant des fluctuations de forte amplitude et des surpressions pouvant provoquer des incidents.

- La régulation des débits et pressions est très délicate, et il est nécessaire de nettoyer fréquemment les têtes de régulation.

En raison des débits utilisés et des pertes de charge existant dans la boucle I.B.S., nous avons adopté, pour son alimentation en eau, la seconde de ces possibilités.

La vanne d'entrée V1 permet d'isoler la boucle, lorsqu'une autre manipulation est en cours.

La vanne intermédiaire V2, disposée en face de l'armoire de commande des débits et pressions amont, facilite la manipulation. Elle est facilement accessible au cas où un arrêt d'urgence de l'essai serait nécessaire.

Par mesure de sécurité, une vanne V3 a été disposée en haut de l'installation, sous la cuve tampon de sortie : en cas d'incident, il est ainsi possible d'éviter que l'eau accumulée dans cette cuve n'inonde complètement les appareils de mesure et de visualisation.

Les vannes V1, V2 et V3 sont commandées manuellement et fonctionnent en "tout ou rien".

Une purge, au point bas de l'installation, permet de vider celle-ci après chaque essai.

La mesure des débits a été réalisée grâce à un débitmètre FAURE HERMAN étalonné de 0 à 200 m^3/h.

3. Alimentation en air

L'air nécessaire à la formation de l'émulsion provient directement du compresseur. Sa pression en amont de l'expérience, imposée par une vanne à commande pneumatique, a été fixée dans tous nos essais à 8 bars relatifs.

L'air, après filtrage par deux plaques poreuses disposées en série (100 μ et 5 μ), est introduit dans la boucle à l'aide de l'injecteur représenté sur les figures 5-3 et 5-4. Cet injecteur consiste en un tube coudé de diamètre intérieur 10 mm, terminé par un convergent et un trou de sortie dont le diamètre peut prendre les valeurs de 150 μ, 300 μ et 500 μ.

Cet injecteur se comporte comme un col sonique et le débit d'air injecté est très stable, ce qui maintient une concentration en bulles constante dans la zone d'étude.

La pression en amont du col est donnée par un manomètre BOURDON étalonné de 0 à 10 bars. La pression dans le tube principal

est mesurée en face de l'entrée d'air par un manomètre analogue.

Nous donnons dans le tableau 5-I ci-dessous la valeur des débits d'air injectés pour les trois diamètres de cols, et les taux de vide moyennés surfaciquement dans la section de visualisation pour trois valeurs de débit liquide (Q_L = 15, 20 et 25 m^3/h).

Diamètre du col (μ)	Q_L m^3/h / m_G Kg/s	Taux de vide α		
		15	20	25
150	$3,78.10^{-5}$	$3,62.10^{-3}$	$2,72 .10^{-3}$	$2,17.10^{-3}$
300	$1,51.10^{-4}$	$1,44.10^{-2}$	$1,06 .10^{-2}$	$8,69.10^{-3}$
500	$4,20.10^{-4}$	$4,02.10^{-2}$	$3,023.10^{-2}$	$2,41.10^{-2}$

Tableau 5-I

4. Canal de visualisation

La figure 5-5 montre la section de visualisation. Elle consiste en un tube de verre pyrex de section carrée 24 x 24 mm^2, et de longueur 200 mm. Les faces ont une épaisseur de 5 mm.

Deux tubes de tranquillisation, en acier inoxydable, de même section et de longueur 800 mm chacun, ont été disposés en amont et en aval du tube de verre. L'étanchéité a été réalisée au moyen de joints en caoutchouc comprimés à la clé dynamométrique, afin que le verre ne soit pas soumis à des couples de torsion.

Le tube de verre est percé sur l'une de ses faces de deux trous circulaires :

- le premier trou, de diamètre Ø = 10 mm, permet de disposer un bouchon de laiton muni d'une prise de pression statique, sur la paroi interne du tube. Un manomètre BOURDON, étalonné de 0 à 6 bars, est relié à cette prise de pression.

- le second trou, de diamètre $\emptyset$ = 24 mm, sert à introduire la sonde dans l'écoulement, grâce à un bouchon de laiton.

Ce tube de verre a été réalisé par la société Quartex : les quatre faces ont été soudées entre elles par diffusion du verre à haute température. La présence des trous dans l'une des faces a rendu cette réalisation très délicate. Le polissage optique des faces a été réalisé après soudure.

La pression maximale que le tube de verre puisse supporter est de trois bars absolus.

En utilisant un tube identique en acier, nous avons mesuré la pression statique dans la section moyenne du canal de visualisation pour divers débits liquides, en l'absence et en présence d'air.

Sur les figures 5-6 et 5-7, nous avons représenté les résultats obtenus : nous constatons que, en l'absence du gaz (figure 5-6) les valeurs expérimentales se situent entre les courbes théoriques représentatives des fonctions :

$$(I) : \quad p - p_{atm} = \Delta p_f + \rho g h$$

$$(II) : \quad p - p_{atm} = \Delta p_f + \rho g h + \rho \frac{V^2}{2}$$

où Δp_f représente la perte de charge par frottement dans le canal de section carrée.

L'écart entre la courbe (I) et la courbe expérimentale est dû aux pertes de charges singulières créés par :

- le changement de forme entre le tube de section carrée et le tube de section circulaire.

- la présence de la vanne V3 et du dispositif anti-vibratoire

- l'influence du brise-jet et la sortie du liquide dans un milieu liquide fermé (accumulation d'eau dans la cuve tampon de sortie).

En présence d'air (figure 5-7) et dans les conditions de faible taux de vide qui ont été celles des essais, la pression sur le tube de verre n'excède pas de plus de 6 % la valeur qu'elle a en eau seule.

Par mesure de sécurité, afin de ne pas risquer une rupture du tube de verre, nous avons limité le débit liquide à la valeur de 25 m^3/h dans toutes nos manipulations.

Pour réduire les conséquences de tout incident (comme celui qui est décrit plus bas) une enceinte de protection en tole, percée des ouvertures nécessaires aux manipulations, a été disposée autour du canal de verre. La majorité des instruments de mesure ont été disposés à l'extérieur de cette enceinte.

Nous rapportons, dans le tableau 5-II ci-dessous, les principales caractéristiques hydrodynamiques de l'écoulement dans le canal d'essai pour différentes valeurs du débit d'eau. Ces valeurs sont pratiquement inchangées en présence d'air.

Q_L (m^3/h)	V (m/s)	Re	p (bars)
10	4,82	$9,64\ 10^4$	1,34
15	7,23	$1,44\ 10^5$	1,58
20	9,64	$1,93\ 10^5$	1,89
25	12,05	$2,41\ 10^5$	2,25
30	14,46	$2,88\ 10^5$	2,70

Tableau 5-II

Il convient de signaler ici un incident survenu lors de l'un des essais. Cet incident a freiné le déroulement normal de l'expérimentation pendant trois mois environ :

A la suite d'une défaillance du système d'alimentation en eau (§ 2), l'air sous pression contenu dans le ballon régulateur a fait irruption dans le circuit de la boucle I.B.S. provoquant des pulsations de forte amplitude (bouchons d'air) et aboutissant à l'explosion du tube de verre. Les appareils de mesure et de visualisation n'étaient point sous tension à ce moment, ce qui a limité les dégâts. Les délais de réalisation d'un nouveau tube de verre ont conditionné la remise en route de l'expérience.

Cet incident nous a conduit à prendre des mesures de sécurité accrues. Chaque essai a notamment été précédé, par la suite, de la vérification du volume d'eau cyclant dans la boucle, et le remplissage éventuel du ballon régulateur.

5. Système antivibratoire

Le dispositif de visualisation étant extrêmement sensible, comme nous le montrerons plus loin, il était nécessaire de disposer, dans le circuit mécanique, un élément pour y atténuer au maximum les vibrations.

Pour ce faire, nous avons monté dans un premier temps l'accouplement "Vibrofix" représenté sur la figure 5-8 : il s'agit d'un tube cylindrique en caoutchouc muni de trois cannelures.

Cet élément élimine parfaitement les vibrations. Malheureusement, il créé une perte de charge singulière tout à fait excessive, comme le montre la courbe représentée sur la figure 5-9.

Nous avons donc abandonné cet élément et fait réaliser le système représenté sur la figure 5-10 : il s'agit là d'un système de deux tubes coulissants.

Les vibrations sont correctement atténuées sans qu'une perte de charge singulière excessive soit créée.

6. Cuve tampon de sortie et brise-jet

En sortie du canal d'essai, l'écoulement débouche à l'air libre dans une cuve de 1 m de hauteur et de 1 m^3 de volume.

Cette cuve, dans laquelle s'effectue la séparation du gaz et du liquide avant le recyclage de ce dernier, permet de maintenir la pression atmosphérique au point haut de l'installation.

Un brise-jet, profilé de manière à minimiser les perturbations de l'écoulement, a été installé dans cette cuve à une distance de 20 cm de la sortie du canal d'essai.

II. Dispositifs mis en oeuvre pour la détection des bulles et la prise de vue

L'ensemble du dispositif de visualisation mis en oeuvre pour l'étude des impacts des bulles sur la sonde est représenté sur la figure n° 5-11. Une vue d'ensemble et des vues partielles le montrent sur les figures 5-12, 5-13 et 5-14.

Il comprend :

- un système de détection de bulles
- les appareils de prise de vue (caméra ultra-rapide, optique d'entrée de la caméra) et d'illumination
- la chaîne électronique associée.

1. Dispositif de détection des bulles

Les bulles arrivent dans la section de prise de vue de façon aléatoire en temps et en position. Il a donc fallu concevoir un dispositif qui déclenche automatiquement les appareils de prise de vue lorsqu'une bulle arrive sur la sonde. La figure 5-13 montre la partie optique de ce dispositif.

Son fonctionnement est le suivant :

Un faisceau lumineux, issu d'un laser He-Ne "Spectra-Physics" d'une puissance de 1 mW est dédoublé sur la lame semi-réfléchissante SR. Une partie de ce faisceau continue tout droit, alors que l'autre est dirigée vers le miroir M où il se réfléchit. Les deux faisceaux ainsi obtenus se croisent dans le canal d'essai au droit de la sonde, à une distance réglable de celle-ci. Cette distance, qui reste de l'ordre du millimètre, est déterminée en fonction de la vitesse de l'écoulement et des divers retards de la chaîne électronique. En sortie du canal d'essai, chaque faisceau traverse un diaphragme D de 200 μ de diamètre et est intercepté par une photodiode BPY 77 fabriquée par la société RTC.

Lorsqu'une bulle traverse la partie du faisceau découpée par le diaphragme D, la photodiode réagit à la brusque variation de luminosité par l'émission d'un signal électrique. Ce signal est amplifié (amplificateur MAP 42, de gain 64), discriminé (discriminateur VDI 11), mis sous forme de signaux rectangulaires (mise en forme VDI 20) et envoyé dans un circuit de coïncidence que nous avons monté pour la circonstance.

Lorsqu'une bulle coupe simultanément les deux faisceaux, donc se trouve en leur point d'intersection, au droit de la sonde, le circuit de coïncidence envoie une impulsion qui, après amplification, déclenche les appareils de prise de vue.

Ce dispositif que nous avons conçu et mis au point avec l'aide de Monsieur CARNET du Service d'Electronique de Saclay, a nécessité la mise en œuvre de tiroirs d'électronique rapide pour minimiser l'intervalle de temps entre la détection d'une bulle et la photographie de son impact sur la sonde. La plupart de ces tiroirs ont été empruntés au Département d'Electronique Générale de Saclay pour la durée des essais.

Les supports constitutifs de la partie optique du dispositif reposent solidairement sur un banc horizontal qui peut se déplacer verticalement au moyen d'un chariot.

Sur ce banc optique, chaque élément peut être déplacé longitudinalement et tourné.

Tous les mouvements se font à l'aide de vis micrométriques.

Le réglage de ce dispositif de détection des bulles doit être effectué au début de chaque essai. La boucle est remplie d'eau, immobile. Le réglage se déroule de la façon suivante :

α) positionnement des faisceaux lumineux de telle sorte qu'ils se coupent au droit de la sonde : pour cela la distance entre plan de détection et plan de visualisation est ramenée à zéro : les faisceaux sont positionnés lorsque la sonde est sur leur chemin.

β) réglage de la distance sonde-faisceau laser en tenant compte des retards imposés de la chaîne électronique aval.

γ) positionnement des photodiodes : pour cela les arrivées des bulles sont simulées au moyen d'un disque muni de dents qui coupent de façon périodique le faisceau laser avant qu'il ne soit divisé en deux faisceaux. Les photodiodes sont positionnées correctement lorsque le signal qu'elles émettent est maximum.

2. Prise de vue

La prise de vue met en jeu les appareils suivants :

- une caméra ultra rapide
- l'optique d'entrée qui lui est associée

a) Caméra ultra-rapide

La caméra ultra-rapide utilisée nous a été prêtée par le Service des Effets Extérieurs du CEA-DAM (Centre de Limeil). Il s'agit d'une caméra à tube convertisseur d'images "IMACON" fabriquée par la Société John Hadland (voir figures n° 5-15 à 5-17). Sur la photocathode d'entrée, l'image lumineuse se transforme en "image" électronique.

Le système d'obturation fonctionne de la façon suivante : une oscillation sinusoïdale est appliquée sur des plaques de déflexion agissant sur le faisceau d'électrons. Ce faisceau d'électrons rencontre en un point de concentration une plaque métallique opaque percée d'un petit trou. Les temps d'exposition sont déterminés par les passages du faisceau d'électrons dans le trou, lorsque ce faisceau balaye cette plaque d'obturation sous l'effet de l'oscillation sinusoïdale. La cadence de prise de vue est ainsi déterminée par la fréquence de la sinusoïde appliquée. La dimension du trou et l'amplitude de la sinusoïde sont calculées pour que le temps d'exposition soit égal au 1/5 de l'intervalle de temps entre images.

Une seconde sinusoïde de même fréquence et de même amplitude mais légèrement déphasée par rapport à la première est appliquée à une paire de plaques de déflexion compensatrice située juste après la plaque d'obturation. La différence de phase des deux sinusoïdes est calculée pour que les expositions successives soient immobilisées par des portions différentes de la sinusoïde de compensation, de telle sorte que les images apparaissent sur l'écran alternativement l'une au-dessous de l'autre (position image supérieure et image inférieure, voir figure n° 5-17).

D'autre part un système de déflexion horizontale, commandé par un escalier de tension (figure 5-17), agissant toutes les deux prises de vue, permet de répartir les images sur l'écran.

Deux impulsions de déclenchement sont nécessaires pour prendre une séquence d'images.

Une première impulsion (T1) prédéclenche le balayage vertical des images. Une deuxième impulsion (T2) retardée par rapport à T1 et dont le front de montée doit être de 5 V/ns, déclenche le balayage horizontal des images, donc la prise de vue. L'amplitude des impulsions T1 et T2 doit être de l'ordre de 50 V / 50 Ω.

Leur obtention à partir des signaux issus du circuit de coïncidence, a nécessité la mise au point de circuits électroniques adaptés mettant en oeuvre des transistors à avalanche.

Cette caméra permet de prendre des séries de 6 à 16 images à une fréquence de 1 million d'images par seconde. La caméra utilisée, vieille de plusieurs années, ne nous a cependant pas permis de prendre plus de 8 images par séquence, tout essai de dépasser ce nombre se soldant par une superposition, donc un brouillage des images.

Les photos sont obtenues sur un papier photographique Polaroïd 3000 ASA, dont la résolution est de 10 paires de lignes par millimètre environ.

b) Optique d'entrée de la caméra

L'optique d'entrée de la caméra ultra-rapide est constituée de deux objectifs O_1 et O_2 disposés selon le schéma représenté sur la figure 5-18.

Le premier objectif (O_1) a une distance focale de 50 mm. Son tirage mécanique (distance entre la pointe de la sonde et la face avant de la monture mécanique de l'objectif) a une valeur minimale de 35 mm correspondant à

- l'épaisseur d'eau entre la pointe de la sonde et la face intérieure du tube de verre (12 mm)

- l'épaisseur de la paroi de verre (5 mm)

- une épaisseur d'air de 18 mm due à la disposition mécanique de l'ensemble.

Cet objectif, dans les conditions de tirage minimum auxquelles nous avons en général travaillé, donne, de l'extrémité de la sonde, une image aérienne à 245 mm de la face extérieure du tube de visualisation, avec un grandissement égal à 3,5.

Cette image aérienne est reprise par l'objectif O_2 situé à 395 mm de la face avant du tube de visualisation, qui a pour distance focale 50 mm. Cet objectif projette l'image aérienne $A_1 B_1$ de la pointe de la sonde sur la photocathode de la caméra ultra-rapide, avec un grandissement égal à 0,5.

La caméra ayant un grandissement égal à 2, il en résulte que les photographies obtenues sont grandies 3,5 fois dans la configuration décrite ici.

L'ensemble des deux objectifs O_1 et O_2 constitue un système optique de distance focale 9,1 mm dont l'ouverture numérique est égal à 0,33.

La résolution de ce système optique est imposé non par la diffraction de ses éléments, mais par la granularité de l'émulsion photographique. Compte tenu du grandissement global de 3,5, cette résolution est égale à 14 μ environ.

La profondeur de champ, donnée par la relation $2\ g\ n\ (\gamma+1)/\gamma$ où $1/n$ est l'ouverture numérique, g la granularité et γ le grandissement est égale à 375 μ.

3. Illumination

a) Lampe utilisée

L'éclairement nécessaire à l'illumination de la bulle et de la sonde se calcule en fonction des caractéristiques citées précédemment.

Le film utilisé a une sensibilité de 3000 ASA.

Le temps de pose est de 200 ns.

L'éclairement nécessaire est donc égal à $E = 1/(3000 \times 2.10^{-7})$ soit 1 666 lux. Le flux lumineux nécessaire pour la prise de photo est égal à : $\emptyset = E \times S$, où S est la surface de la photo. Or chaque photo est un carré de 14 mm de côté. Donc

$$\emptyset = 1\ 666 \times 196.10^{-6} = 0,326 \text{ lumen}$$

L'intensité de la source lumineuse est égale au flux lumineux rapporté à l'angle solide illuminé. Or, la surface illuminée est une zone de 2 mm de diamètre environ, à une distance de 0,5 m de la sonde. L'angle solide est donc

$$\Omega = 4.10^{-6}/25.10^{-2} = 16.10^{-6} \text{ stéradians}$$

L'intensité de la source, calculée en négligeant toutes les pertes de lumière, et en supposant que le gain en lumière du tube convertisseur d'images est égal à 1 (ce qui est vérifié), doit donc être, dans ces conditions, approximativement égale à

$$I = 0,326/16.10^{-6} \simeq 2.10^{4} \text{ Candela}$$

La source lumineuse doit donc être capable de fournir une intensité supérieure à 20 000 Candela pendant une durée de 8 μs.

Seule une lampe à éclairs possède une puissance suffisante. La lampe utilisée est un flash "STROBOTAC" GR 1538-A, muni d'une capacité de charge supplémentaire GR-1538-P4.

Ce flash, réglé pour fonctionner au coup par coup, est déclenché, lors du passage des bulles par l'impulsion de sortie du circuit à coïncidence.

Pour obtenir un éclairement uniforme autour de la sonde, un verre dépoli a été disposé entre la lampe flash et le tube de visualisation.

b) Existence d'un parasite électrique créé par la lumière de la lampe flash

En essayant d'enregistrer le signal électrique, issu de la sonde et correspondant aux photographies de l'interaction bulle-sonde, nous avons constaté l'existence d'un parasite venant perturber ce signal.

Après avoir éliminé successivement toutes les autres causes de parasite, nous nous sommes rendus compte que la lampe à éclairs provoquait celui qui perturbait notre mesure.

Nous avons isolé l'ensemble des appareils afin d'éliminer les parasites électriques, et nous avons constaté alors que la lumière de la lampe flash était à l'origine de ce phénomène. Les figures n° 5-19, 5-20 et 5-21 illustrent la mise en évidence du parasite.

Sur la figure 5-19 nous avons représenté le schéma du montage utilisé pour mettre en évidence en statique, le parasite créé par la lumière de la lampe flash.

Sur la figure 5-20, nous avons représenté la courbe d'intensité lumineuse du flash en fonction du temps.

Enfin sur la figure 5-21 nous avons comparé les signaux reçus sur la sonde en présence et en l'absence d'un cache optique pour divers liquides :

- de l'eau permutée
- de l'eau industrielle
- un mélange eau - acide nitrique
- un mélange eau - amoniaque

Nous en avons déduit :

α) Le "parasite lumineux" n'existe que quand la sonde est en présence d'un liquide.

β) Ce parasite correspond au début de l'éclair émis par la lampe flash, et non à la durée totale de cet éclair. Il est donc lié à la dérivée de l'intensité lumineuse mise en jeu. Ce ne peut donc être un effet calorifique qui ferait varier la résistance du liquide car le phénomène durerait pendant toute la durée de l'éclair et serait d'amplitude croissante.

γ) La composition du liquide a une influence sur ce parasite, ce qui élimine un effet dû uniquement à la sonde dont l'extrémité en tungstène jouerait le rôle de cellule photoélectrique. Nous constatons que l'amplitude du parasite est plus importante lorsque le liquide est ionisé, quelque soit le signe de cette ionisation.

Le parasite mis en évidence semble donc issu d'un effet d'ionisation du liquide lors de la variation brutale du nombre de photons incidents.

III. Résultats

1. Mode opératoire d'un essai

Chaque essai est prévu pour durer une demi journée, sauf panne ou incident.

Il comprend :

- une phase de vérification de la bonne marche de l'ensemble de l'installation (notamment du volume d'eau circulant dans la boucle).

- une phase de réglage des systèmes optiques (dispositifs de détection des bulles, de prise de vue et d'illumination) et des systèmes électroniques (réglage des tensions aux bornes des divers appareils ou du gain des amplificateurs).

- le choix des conditions hydrodynamiques de l'essai (débits de chacune des phases).

- la prise effective des photographies de l'impact bulle-sonde.

2. Photographies obtenues

Les essais effectués ont permis d'obtenir plus de deux cents photographies représentant l'inter-action entre une bulle et

la sonde à variation d'impédance, pour des débits liquides compris entre 15 et 25 m^3/h, donc des vitesses moyennes comprises entre 7 et 12 m/s environ.

Nous avons extrait de cet ensemble de résultats les photographies des figures 5-22 à 5-39 qui illustrent les phénomènes mis en évidence. Nous avons groupé ces photographies en quatre catégories :

a) Les photographies 5-22 à 5-26 représentent des bulles de diverses dimensions, situées en amont de la sonde, avant qu'elles ne s'empalent sur l'extrémité de celle-ci.

b) Les photographies 5-27 à 5-32 représentent des bulles passant au voisinage de la sonde sans venir s'y empaler.

c) Les photographies 5-33 à 5-37 représentent des bulles lors de leur impact avec la sonde.

d) Enfin, les photographies 5-38 et 5-39 représentent des groupes de bulles en train de coalescer au voisinage de la sonde.

3. Signal synchrone aux photos

Malgré les tentatives que nous avons faites, nous n'avons pas réussi à enregistrer le signal électrique issu de la sonde à variation d'impédance, dans le même temps qu'étaient prises les photographies de l'interaction bulle-sonde.

Cet échec a pour causes :

- l'interférence du signal utile, caractéristique du passage des bulles sur la sonde, avec le signal parasite créé par l'illumination de la zone photographiée autour de l'extrémité de la sonde. Ce signal parasite a déjà été étudié dans le § II-3 de ce chapitre.

- le déclenchement prématuré du balayage de l'oscilloscope sur lequel devait être visualisé le signal issu de la sonde.

4. Analyse des résultats

L'examen de l'ensemble des photographies obtenues dans cette expérience permet de formuler un certain nombre de conclusions :

a) Forme des bulles

Comme il était prévisible, les petites bulles (diamètre inférieur à 500 μ environ) ont une forme sphérique, ce qui est justifié par l'influence importante des forces dues à la tension superficielle par rapport aux forces d'inertie de viscosité et de pesanteur.

Les bulles de dimension supérieure cessent d'avoir la forme sphérique, sans prendre cependant aucune forme spécifique, contrairement à ce qui a été mis en évidence dans le cas des faibles vitesses d'écoulement [65].

b) Les bulles ne se déforment pas sensiblement sur la sonde

Lors de l'impact bulle-sonde, les photographies obtenues ne permettent pas de conclure à l'existence d'une déformation des bulles. Cette déformation, si elle existe, doit donc être d'amplitude extrêmement faible.

C'est en effet ce que nous avons mis en évidence dans l'expérience "V.E.E." qui fait l'objet du chapitre 7.

c) Les bulles ne scissionnent pas

Alors que nous avons pu photographier des groupes de bulles en train de coalescer, nous n'avons à aucun moment constaté de cassure de bulle, ni en amont de la sonde, ni lors de l'impact bulle-sonde.

d) Les bulles se déforment au voisinage de la sonde

L'expérience "I.B.S." a permis de mettre en évidence un effet extrêmement important. Il s'agit d'un phénomène de déformation des bulles au voisinage de la sonde.

Ce phénomène est illustré par les figures n° 5-22 à 5-24 et 5-28 à 5-33. Il appelle les remarques suivantes :

α) Dans tous les cas, le sens de la déformation est le même. Les bulles sont attirées par la pointe de la sonde. Il arrive même (photo 5-30) que cette attraction se manifeste en deux points de la surface de la bulle.

β) La déformation est indépendante de la tension d'alimentation de la sonde à variation d'impédance : nous avons fait varier celle-ci, lui faisant prendre des valeurs positives, négatives ou

nulles, sans noter de différence dans l'allure du phénomène.

γ) La constatation précédente tend à démontrer que ce phénomène de déformation à distance n'est pas de nature électrique.

Ceci est corroboré par le fait que le diamètre de la zone d'influence du champ électrique créé par la sonde est très inférieur à la distance à laquelle se produisent les déformations.

δ) Les déformations à distance se produisent sur les bulles dont les dimensions sont les plus grandes ($\varnothing_b \geqslant 800\ \mu$) à des distances qui peuvent aller jusqu'à 1,5 mm, soit cinq fois le diamètre de l'extrémité de la sonde, environ.

Cependant nous constatons que la distance entre la bulle et la sonde reste inférieure à trois fois le rayon de la bulle environ pour qu'une déformation soit notable.

Il semble donc que ce phénomène de déformation à distance des bulles d'air au voisinage de la sonde soit un phénomène purement hydrodynamique.

Il doit être considéré comme un effet de paroi. Son étude doit prendre comme longueur de référence le diamètre de la bulle et non celui de la sonde.

IV. Conclusion

L'expérience I.B.S. a permis, malgré de nombreuses difficultés (en particulier l'absence de disponibilité permanente du matériel nécessaire à la prise de vue) d'obtenir un certain nombre de résultats intéressants.

Parmi ceux-ci il faut mentionner :

- l'existence d'un courant induit dans la sonde lors de l'illumination du liquide dans lequel elle est immergée.

- la déformation des bulles d'air au voisinage de la sonde à variation d'impédance.

CHAPITRE 5

EXPERIENCE "HOLOGRAPHIE"

I. Introduction

L'expérience "I.B.S.", décrite au chapitre précédent, permet de visualiser l'interaction bulle-sonde dans un écoulement contenant un nombre extrêmement restreint de bulles. La mise en oeuvre de moyens classiques de visualisation limite par ailleurs la zone d'observation à un volume très réduit (de l'ordre de quelques millimètres cube) autour de l'objet étudié.

Dans le cas d'écoulements monophasiques, l'holographie, dont nous rappelons plus bas le principe, permet l'observation de phénomènes dans des volumes importants et parfois en présence d'obstacles opaques [78], [79].

Elle présente l'avantage de restituer le relief des objets étudiés. D'autre part, grâce à l'utilisation d'un laser à impulsions lors de la prise de vue, elle permet d'étudier des écoulements extrêmement rapides.

L'expérience "HOLOGRAPHIE" que nous avons montée a eu pour but de tester les possibilités d'application de cette technique à la visualisation dans des écoulements gaz - liquide à bulles.

Le montage expérimental, réalisé à Saclay, a été installé dans le laboratoire d'optique de l'Institut Franco-Allemand de Saint-Louis (I.S.L.) où se sont déroulées les manipulations. Ce laboratoire, parfaitement équipé pour la visualisation holographique d'objets en mouvement ultra-rapides [80] avait déjà effectué des essais sur des gouttelettes d'eau dans de l'air [81], [82]. Il a

donc paru tout indiqué de s'assurer sa collaboration pour réaliser cette expérience.

Les essais ont duré une semaine, du 19 au 23 juin 1972, laps de temps trop court pour qu'ait pû être étudiée de façon approfondie l'interaction bulle-sonde. L'expérience a donc été limitée à la visualisation des bulles au voisinage d'une sonde dans diverses conditions : plusieurs montages holographiques ont été testés, pour deux épaisseurs de la chambre de visualisation (2 mm et 10 mm) et plusieurs valeurs du taux de vide ($0{,}01 < \alpha < 0{,}9$).

II. Rappel du principe de l'holographie

L'holographie a été découverte en 1948 par D. GABOR et s'est rapidement développée après l'apparition du laser en 1961.

Nous en rappelons le principe.

Lorsqu'un objet O (voir figure 6-1) est éclairé par une source de lumière cohérente monochromatique, il émet, par diffusion, une onde électromagnétique. L'amplitude complexe de celle-ci, mesurée dans un plan H situé devant l'objet, a pour forme $A(x,y) \exp i(\omega t - \varphi(x,y))$.

Cette onde est caractéristique de l'objet : si, l'objet étant absent, on reconstitue dans le plan H une source synthétique dont l'état vibratoire est $A(x, y) \exp i \left| \omega t - \varphi(x, y) \right|$, l'effet obtenu pour un observateur situé devant le plan H est le même que si l'objet était présent : une image à trois dimensions de l'objet est reconstituée.

Un hologramme est précisément un enregistrement photographique qui, éclairé convenablement, reconstitue l'onde $A(x, y) \exp i \left| \omega t - \varphi(x, y) \right|$. Un tel enregistrement ne peut être obtenu en plaçant simplement dans le plan H une émulsion photographique : le noircissement de celle-ci ne serait en effet fonction que de l'énergie reçue $|A(x, y)|^2$ et l'information de phase $\exp i \left| \omega t - \varphi(x, y) \right|$ serait perdue.

Si, par contre, l'onde diffusée par l'objet O est superposée à une onde de référence de même fréquence (voir figure 6-2), les franges d'interférence formées correspondent à une modulation de l'onde de référence par l'onde objet. Cette modulation conserve les variations d'amplitude, mais aussi les déphasages, c'est-à-dire les retards relatifs qui caractérisent les variations de chemin optique entre les différents points de l'objet, donc le relief.

L'opération inverse, démodulation, conduit à la restitution d'une image. Ainsi, en regardant à travers la plaque développée, convenablement éclairée, on retrouve l'objet dont on peut même prendre des photographies.

III. Installation expérimentale

L'installation expérimentale est schématisée sur la figure 6-3 et représentée sur la photographie de la figure 6-4.

En suivant le sens de l'écoulement, elle comprend successivement :

- un débit-mètre à eau FAURE-HERMANN étalonné de 0 à 20 m^3/h.

- deux tubes de tranquillisation en amont et en aval de celui-ci, d'une longueur de 400 mm chacun.

- un convergent avec changement de forme faisant passer des tubes circulaires de diamètre Ø = 50 mm à un tube de section rectangulaire d'épaisseur de 10 mm et de largeur de 100 mm.

- l'émulseur : il est à section rectangulaire constante 10 x 100 mm^2 et sa longueur est de 60 mm. Le diamètre des trous dans les grilles est de 1 mm.

Le débit d'air qui y pénètre est mesuré à l'aide d'un col sonique. Les pressions en amont et en aval du col sont mesurées avec des manomètres BOURDON.

- la chambre de mesure : elle a une longueur de 200 mm et une largeur de 100 mm, son épaisseur peut prendre les valeurs de 2 ou 10 mm. Elle est fermée par deux hublots en verre strioscopique de 100 x 200 mm^2 et d'épaisseur 6 mm.

L'un de ces hublots est percé d'une ouverture circulaire de diamètre Ø = 30 mm permettant d'introduire une sonde dans l'écoulement. Afin de maintenir le bouchon porte-sonde sans créer de contrainte sur la plaque de verre, un montage spécial a été réalisé, faisant porter les efforts sur les brides de soutien de la chambre.

- un divergent avec changement de forme : il permet de passer de la section rectangulaire à une section circulaire de Ø = 80 mm où se raccorde un tuyau souple pour l'évacuation de l'émulsion.

Cette installation, très simple, a pu être montée rapide-

ment à l'I.S.L. Le débit d'eau maximal disponible était égal à 6 m^3/h.

La pression dans la chambre de visualisation est restée proche de la pression atmosphérique dans tous les essais. Le taux de vide moyen, calculé à partir des débits d'air et d'eau injectés peut varier de 1 % à 90 %.

Compte tenu des débits d'eau et des taux de vide des vitesses supérieures à 20 m/s ont pu être obtenues.

IV. Montages optiques

Divers montages holographiques ont été testés :

- montage de Gabor (figure 6-5)
- montages avec référence inclinée
  - . lumière transmise non diffuse (figure 6-6)
  - . lumière transmise diffuse (figure 6-7)
  - . lumière réfléchie (figure 6-8)

La source de lumière utilisée pour la prise de vue est un laser à rubis monomode CGE (figure 6-9), comprenant :

- un étage pilote délivrant 5 à 10 mJ en 20 ns
- un étage amplificateur donnant une énergie de 100 mJ maximum.

Sa longeur de cohérence est de 1,2 m.

La restitution est obtenue avec un laser continu Hé-Né "Spectra-Physics", d'une puissance de 50 mW. Un dispositif de lentilles, et objectifs, et un circuit fermé de télévision a permis d'obtenir des images avec un grossissement supérieur à 100.

V. Résultats obtenus

1. Conditions expérimentales

Nous avons procédé à l'enregistrement d'hologrammes dans des conditions expérimentales très étendues. Le taux de vide a pris des valeurs comprises entre 0,02 et 0,90. La vitesse du liquide a atteint la valeur de 25 m/s.

Les photographies des figures 6-11 à 6-17 permettent de juger des résultats obtenus. Nous résumons dans le tableau 6-I ci-dessous les diverses conditions dans lesquelles ont été prises ces photographies.

Q_L représente le débit d'eau

α est le taux de vide

h est l'épaisseur du canal de visualisation

V est la vitesse de l'émulsion

g représente le grossissement de la photographie

n° de la photographie	h (mm)	Q_L (m^3/s)	α	V (m/s)	g	Montage
6-11 a 6-11 b	10	5,5	0,05	1,6	13 10	Référence inclinée
6-12 a 6-12 b	10	5,5	0,10	1,7	10	Référence inclinée
6-13	10	2	0,9	5,6	1	Référence inclinée avec diffusion
6-14	10	2	0,9	5,6	1	Réflexion
6-15	2	1,7	0,05	2,50	10	Référence inclinéé
6-16	2	1,7	0,89	21,5	17	Référence inclinée
6-17	2	5,1	0,5	14,2	10	Référence inclinée

Tableau n° 6-I

2. Comparaison des montages

a) Montage de Gabor

Le montage avait donné de bons résultats dans des expériences de visualisation de gouttes d'eau dans l'air [81], [82]. Nous l'avons expérimenté pour des taux de vide de 0,05 et 0,5.

Les bulles sont caractérisées par des taches blanches plus lumineuses que le fond, et bordées de cercles noirs assez difficiles à mettre au point. L'interprétation est très délicate pour la mesure des formes, ce qui nous a conduit à abandonner ce montage.

b) Montages avec référence inclinée

b 1 : Lumière transmise non diffuse

Aux faibles densités, les bulles apparaissent en noir sur fond clair, avec un point central lumineux qui correspond à l'image de la source donnée par la bulle (extrémité de la caustique).

La sonde introduite dans la chambre de mesure est parfaitement visible.

La mise au point sur les bulles ou sur la sonde peut être réalisée sans ambiguité. Ceci est illustré par les photographies des figures 6-11, 6-12 et 6-15.

Aux forts taux de vide, on distingue parfaitement certaines bulles d'air qui apparaissent en noir avec une tache lumineuse au centre. Le fond est noir, parsemé de nombreux points lumineux. Les bulles que l'on distingue semblent appartenir aux couches proches de la paroi extrême de la chambre de mesure. Les points lumineux dans le fond noir correspondent aux images de la source dues aux différentes bulles des couches antérieures (voir figures 6-10 et 6-16).

Alors que la sonde était parfaitement visible dans les écoulements à faible taux de vide, elle n'apparaît à forte densité que pour une faible épaisseur du canal (photographie 6-17).

b 2 : Lumière transmise diffuse

Les bulles sont toujours en noir sur fond clair. Cependant au lieu d'un point blanc (source) on obtient au centre de la bulle l'image du diffuseur. De plus le fond est granuleux, ce qui est dû à la répartition de phase aléatoire du diffuseur : les bords des

bulles apparaissent dentelés.

Ce montage ne permet donc pas d'obtenir une bonne résolution.

b 3 : Lumière réfléchie

Ce montage ne présente pas d'avantage par rapport au montage avec lumière transmise.

Il permet d'observer, à fort taux de vide, la première couche de l'émulsion.

3. Granulométrie

Les hologrammes obtenus permettent de déterminer les propriétés granulométriques de l'émulsion.

Les bulles n'ont pas de forme parfaitement définie. Cependant elles apparaissent dans leur grande majorité comme convexes.

Les bulles de plus petite dimension sont sphériques. Il est possible d'assimiler en première approximation, dans un modèle simple, la forme des bulles à une forme sphérique.

Les dimensions varient entre quelques microns (points noirs sur les photographies) à quelques millimètres. Cependant c'est entre 500 μ et 1 mm que se situent la majorité des diamètres de bulles.

VI. Conclusion

L'holographie permet d'effectuer une bonne visualisation des écoulements diphasiques gaz-liquide à bulles dans le cas des taux de vide peu élevés. Aux forts taux de vide, seules les bulles proches des parois peuvent être visualisées et non celles qui sont contenues au sein de l'émulsion.

Ainsi pour étudier l'interaction d'une émulsion avec un obstacle (telle une sonde à variation d'impédance) des montages, plus élaborés que ceux qui ont été essayés, doivent être mis au point dans le cas des taux de vide élevés.

Parmi les montages essayés, nous avons constaté que le plus intéressant était le montage à référence inclinée en lumière transmise.

CHAPITRE 6

EXPERIENCE "V.E.E."

L'expérience "V.E.E." (visualisation en émulsion), réalisée à Saclay avec la collaboration de la Division Optique de l'ONERA, a eu pour but, comme l'expérience I.B.S., l'obtention de photographies de bulles, au moment de leur impact sur une sonde à variation d'impédance.

Nous avons cependant imposé, dans cette expérience, une limite supérieure à la résolution du système optique, égale au 1/10 du diamètre de la pointe de la sonde (soit 2 μ environ).

En outre, nous avons cherché quel était le taux de vide maximum compatible avec une observation convenable des bulles.

Cette expérience se distingue de I.B.S. dans la mesure où :

a) Nous avons mis l'accent sur la qualité optique de la photographie obtenue (bonne résolution, grossissement important, suppression des aberrations optiques). Ceci nous a conduit au calcul et à la réalisation d'un objectif adapté.

b) Nous n'avons pas cherché à détecter les bulles en amont de la sonde ; la prise de vue est déclenchée directement par les signaux issus de la sonde : seules des bulles en cours d'empalement ont donc été photographiées.

c) Nous n'avons pas limité le taux de vide à une valeur très faible, mais l'avons au contraire fait croître pour déterminer la valeur maximale compatible avec l'observation correcte de l'impact bulle-sonde.

I. Conditions générales de l'expérience

1. Installation

Nous avons repris pour cette expérience l'installation utilisée dans l'expérience "Holographie" et décrite au chapitre précédent (figures 7-3 et 7-4).

Seule la chambre de mesure a été légèrement modifiée : il s'agit toujours d'un canal cylindrique de section rectangulaire. Sa largeur est de 100 mm. Son épaisseur a été fixée à 10 mm.

Les parois latérales de la chambre ne sont plus entièrement constituées de verre (ce qu'imposaient les essais d'holographie) mais consistent en deux plaques métalliques munies chacune d'un hublot circulaire en verre, permettant l'éclairage et l'observation de la sonde. Ces hublots, épais de 6 mm, sont scellés à l'araldite dans leurs supports, de telle manière que leur face en contact avec l'émulsion soit dans le même plan que la face des plaques métalliques également en contact avec l'émulsion. L'écoulement n'est donc pas perturbé.

Un bouchon disposé dans la paroi métallique munie du hublot d'éclairage, permet d'introduire la sonde à variation d'impédance, dont l'extrémité est placée dans le plan médian de l'écoulement, face aux hublots.

Pour permettre l'introduction de cette sonde, dont la longueur après le coude est de 25 mm, la dimension du hublot d'éclairage a été prise inférieure à celle du hublot d'observation.

Cette configuration différente de la chambre de mesure, rendue possible par le type d'expérience, a le mérite d'être d'une réalisation plus simple. Par ailleurs, elle permet de travailler dans des conditions de sécurité plus grandes, à des débits plus élevés que dans l'expérience "Holographie". En effet :

a) La surface de verre en contact avec l'émulsion est réduite.

b) Le bouchon porte-sonde n'appuie pas directement sur le verre, ce qui réduit les tensions sur ce dernier.

2. Alimentation en eau et en air

L'installation est alimentée en eau grâce au réseau sous pression du laboratoire qui a été décrit plus haut (chapitre 5 § I-2). Le débit d'eau est mesuré à l'aide d'un débitmètre FAURE-HERMAN étalonné de 0 à 60 m^3/h.

Le débit d'eau maximum auquel nous sommes montés au cours des essais est de 35 m^3/h, ce qui correspond à une vitesse moyenne dans la chambre de mesure de 10 m/s environ, en l'absence d'air. En présence d'air, la vitesse est de 11,11 m/s pour un taux de vide de 10 % et elle atteint la valeur de 30 m/s pour un taux de vide de 66 %.

L'air injecté dans l'émulseur provient directement du compresseur. Son débit-masse est mesuré avec un dispositif à col sonique.

La pression dans la chambre de mesure reste toujours voisine de la pression atmosphérique, en raison de la proximité de la sortie à l'air libre et des dimensions des canalisations en aval de cette chambre.

3. Banc optique

Un banc optique, dont le schéma de principe est représenté sur la figure 7-1, a été réalisé pour cette expérience.

Il comprend :

- une lampe à éclairs
- deux condenseurs de lumière
- les objectifs d'observation
- une caméra à obturateur électronique

Nous reviendrons sur chacun de ces éléments dans le paragraphe III, après avoir étudié en détails l'objectif d'observation qui a été réalisé pour cette expérience.

L'ensemble de l'installation et du banc optique est représenté sur la photographie de la figure 7-2.

II. Objectif d'observation

1. Définition de l'objectif

Le diamètre de l'extrémité sensible de la sonde à variation d'impédance est de l'ordre de 20 μ. Le pouvoir séparateur de l'objectif d'observation doit donc être de 2 μ si l'on veut obtenir une résolution égale au 1/10 du diamètre de la sonde.

La première partie de l'étude a donc consisté à calculer et réaliser un objectif d'ouverture numérique suffisante. On sait que le pouvoir séparateur d'un système optique dont l'objet est situé à distance finie, est donné par la formule :

$$y' = \frac{1{,}22\ \lambda}{2\ n \sin u}$$

où : y' est le pouvoir séparateur du système optique ;

λ est la longueur d'onde de la lumière utilisée ;

n est l'indice de réfraction du milieu dans lequel est immergé l'objet ;

u est l'angle que fait avec l'axe optique un rayon issu du centre de l'objet et passant par le bord de la pupille d'entrée.

On en déduit : $$\sin u = \frac{1{,}22\ \lambda}{2\ n\ y'}$$

Dans notre cas, le milieu dans lequel est immergé la sonde est de l'eau, d'indice $n = 1{,}33$; la longueur d'onde de la lumière reste voisine de $\lambda = 0{,}55\ \mu$; la résolution désirée est $y' = 2\ \mu$.

On en déduit que $\sin u = 0{,}126$, ce qui correspond à une ouverture numérique de $n \sin u = 0{,}168$.

Par ailleurs, le tirage mécanique de l'objectif, c'est-à-dire la distance entre l'objet et la face avant de la monture doit être au moins égale à 11 mm, cette distance étant la somme de l'épaisseur d'eau traversée (soit 5 mm) et de l'épaisseur du hublot d'observation (soit 6 mm).

Enfin, l'objectif doit être corrigé de l'aberration chromatique pour la lumière visible et de l'aberration sphérique pour

une longueur d'onde correspondant au milieu du spectre visible. L'objectif travaillant sous un angle réduit, la coma doit être faible, mais non négligeable.

2. Calcul de l'objectif

Le schéma optique de l'objectif d'observation est représenté sur la figure n° 7-3. Ce schéma correspond au schéma adopté pour des objectifs de microscope de faible puissance. Il comprend deux ménisques convergents et un doublet collé, soit en tout quatre lentilles. La face antérieure de chaque ménisque a pour centre le point que lui sert d'objet réel ; la face postérieure travaille aux points d'Young qui sont les points aplanétiques du dioptre sphérique, c'est-à-dire que l'aberration sphérique et la coma sont nulles. L'ensemble de ces deux ménisques constituent un système aplanétique puisque chacun des quatre dioptres qui le constituent travaille lui-même pour des couples de points aplanétiques ; par contre ce système possède une certaine aberration chromatique que l'on rend aussi faible que possible en choisissant pour la réalisation de ces deux ménisques un verre peu dispersif.

Le doublet collé qui suit les deux ménisques comprend une lentille divergente et une lentilleconvergente ; il est corrigé de l'aberration sphérique ; son aberration chromatique est opposée à celle de l'ensemble des deux ménisques ; le choix des verres limite la coma à une valeur acceptable.

Les lentilles ont été réalisées à l'atelier d'optique de l'O.N.E.R.A. et ont reçu un traitement anti-reflets pour la lumière visible.

Cet objectif a une longueur focale de 24,3 mm. Le diamètre de sa pupille de sortie est de 8 mm. L'ouverture numérique correspondante est alors 0,168. Il permet, dans les conditions expérimentales, de donner de l'objet une image à l'infini.

3. Objectif de projection

L'image à l'infini donnée par l'objectif d'observation est reprise par un objectif de projection qui la focalise sur la photocathode de la caméra à obturateur électronique utilisée. Le diamètre utile de la photocathode est de 38 mm. On se propose d'observer un champ circulaire dont le diamètre est voisin de 1 mm dans

l'espace objet ; le grandissement de l'ensemble doit donc être de 38 et la longueur focale de l'objectif doit être voisine de 700 mm.

L'objectif de projection a été calculé sous forme de télé-objectif afin de réduire l'encombrement. Il comprend un doublet collé composé d'une lentille convergente et d'une lentille divergente et une lentille divergente plan-concave. La longueur focale de cet objectif est de 687 mm.

III. Banc optique

Le schéma de principe du banc optique est représenté sur la figure n° 7-1.

Il comprend :

- une lampe à éclairs ;
- deux condenseurs de lumière pour l'éclairement de la zone utile autour de la sonde ;
- l'objectif d'observation ;
- l'objectif de projection ;
- une caméra à obturateur électronique.

1. Lampe à éclairs

Le champ à observer, limité à une zone de 1 mm de diamètre autour de l'extrémité de la sonde, est illuminé avec une lampe flash à xénon "Edgerton FX 12-25". Le spectre d'émission de cette lampe est voisin du spectre visible.

La durée de l'éclair est de 20 µs. Le front de montée est de 2 µs.

2. Eclairement de la zone utile

L'image de la partie émissive de la lampe à éclairs est projetée à l'aide d'un premier condenseur dans la pupille d'entrée d'un deuxième condenseur. La pupille de sortie du premier condenseur est projetée, à l'aide du deuxième condenseur, dans la zone qui entoure la sonde.

Le premier condenseur est constitué par une lentille sphéro-parabolique dont la longueur focale est de 100 mm, et le diamètre 30 mm.

Son ouverture objet est de f/0.3. Il travaille au grandissement 10.

Le deuxième condenseur est du même type que l'objectif d'observation.

La plus petite dimension de la partie émissive de la lampe flash est de l'ordre de 1,5 mm. Son image dans la pupille d'entrée du deuxième condenseur a donc une plus petite dimension de l'ordre de 15 mm. Le diamètre de cette pupille d'entrée étant de 8 mm, elle est couverte totalement.

Le deuxième condenseur travaille au grandissement 1/10. Il donne de la pupille de sortie du premier condenseur, dont le diamètre est de 30 mm, une image de 3 mm : le champ éclairé est donc suffisant puisque le diamètre du champ observé ne dépasse pas 1 mm.

3. Objectifs d'observation et de projection

Leur description a fait l'objet du paragraphe II.

4. Caméra

La caméra utilisée pour la prise de vue est une caméra THOMSON-CSF à obturateur électronique de type TSN-520.

Le principe de son fonctionnement est analogue à celui de la caméra utilisée pour l'expérience IBS : l'image lumineuse est transformée sur une photocathode en image électronique ; un champ électrique en crénaux permet ou empêche le passage du faisceau d'électrons, donc joue le rôle d'obturateur. L'image électronique est ensuite retransformée en image lumineuse et enregistrée sur un film Polaroïd type 107.

Le temps d'ouverture de la caméra peut être réglé par paliers entre 10 et 1000 ns ; le diamètre de la photocathode est de 38 mm. Le grandissement de la caméra est égal à 2, ce qui donne des photos dont le diamètre est de 76 mm.

5. Déclenchement du flash et de la caméra (figure 7-4)

Lorsqu'une bulle arrive sur la sonde, celle-ci émet un signal qu'un système électronique approprié (voir chapitre 4) met sous forme logique. Ce signal logique est nul lorsque le signal réel

est inférieur à un seuil réglable et positif lorsqu'il lui est supérieur. Le front de montée de ce signal déclenche, par l'intermédiaire de la borne "GATE" d'un oscilloscope, la lampe à éclairs.

Une partie du flux lumineux de celle-ci est recueilli sur une cellule photoélectrique qui émet alors une impulsion pour déclencher la caméra.

Le retard entre l'instant où le signal logique change d'état (passage de l'état nul à l'état positif) et l'instant où la photographie est prise sur la caméra est égal à 2 µs.

Le seuil de déclenchement a été positionné en divers points du front de montée du signal réel, de telle sorte que les bulles soient photographiées en divers états d'empalement.

6. Réalisation du banc

L'ensemble du banc optique est monté sur une semelle profilée en U.

La lampe à éclairs peut être réglée latéralement et en hauteur. Le premier condenseur se déplace longitudinalement et en hauteur. Le deuxième condenseur se déplace suivant trois directions orthogonales.

Un ensemble comprenant l'objectif d'observation et l'objectif de projection est monté sur une platine "MICRO-CONTROLE" et peut être réglé micrométriquement suivant trois directions orthogonales.

Enfin la caméra à obturateur électronique est montée sans réglage.

IV. Résultats obtenus

1. Photographies de l'impact bulle-sonde

La photographie 7-5 représente l'extrémité de la sonde à variation d'impédance utilisée dans un écoulement sans bulles.

Les clichés de l'impact bulle-sonde, représentés sur les photographies 7-6 à 7-14 ont été obtenus pour une émulsion dont la vitesse était de l'ordre de 10 m/s et le taux de vide de l'ordre de 5 %. Ce dernier est mesuré à l'emplacement de la sonde grâce à cette dernière.

Les bulles photographiées ont un diamètre compris entre 100 µ et 800 µ. Des bulles de dimension supérieure ont été visualisées mais elles masquent complètement le champ observé.

Les bulles sont empalées sur la sonde à des degrés divers et sous des angles différents.

2. Signaux synchrones

En association avec certains clichés de bulles on a photographié l'écran d'un oscilloscope sur lequel ont été enregistrés :

- sur la voie du haut : le signal délivré par la sonde
- sur la voie du bas : la signal mis en forme.

Un parasite, provoqué par l'allumage de la lampe flash vient perturber le signal issu de la sonde.

Cependant la forme générale de ce signal reste parfaitement reconnaissable pour des bulles dont le temps de passage sur la sonde est supérieur à la durée du parasite (bulles dont le diamètre dépasse 200 µ environ).

De plus l'instant origine de ce signal correspond à l'instant de prise de vue : l'ordonnée à l'origine du signal est connue sans ambiguité. Ceci permet de correler parfaitement les points des signaux aux différents stades de la déformation des bulles.

3. Déformation des bulles

Au moment où elles commencent à s'empaler sur l'extrémité de la sonde à variation d'impédance les bulles se déforment légèrement, d'une quantité comprise entre le 1/10 et le 1/15 du rayon traversé par la sonde.

Après cette déformation initiale, les bulles se translatent parallèlement à elles-mêmes.

La figure 7-15 schématise la progression d'une bulle sur la sonde. Les divers degrés d'empalement correspondent aux points du signal notés sur la figure 7-16. Cette figure a été déduite de l'observation d'un grand nombre de couples photographie - signal synchrone.

4. Visibilité en fonction du taux de vide

Nous avons fait croître progressivement le taux de vide dans la chambre de mesure. Pour un taux de vide de 8 % environ le nombre de photographies réussies devient extrêmement faible, des bulles voisines venant presque toujours masquer la bulle en observation.

D'autre part la luminosité baisse quand le taux de vide croît, de nombreuses bulles formant écran dans le faisceau d'observation ; le pouvoir séparateur du système optique diminue alors et la lumière parasite augmente.

Afin de compenser la baisse de luminosité, la majorité des photographies a été prise avec un temps d'ouverture d'obturateur de 250 ns, ce qui correspond à un déplacement de 2 μ environ, au niveau de la bulle.

V. Conclusion

L'expérience "V.E.E." a permis de montrer qu'il était possible de prendre des photographies de bulles, dans le plan méridien d'un canal de 10 mm de largeur où évolue une émulsion dont le taux de vide est inférieur ou égal à 8 % environ.

Ces bulles, photographiées au moment de leur impact sur la sonde, apparaissent de façon extrêmement nette en raison de la bonne résolution du système optique et du faible temps d'ouverture de l'obturateur de la caméra utilisée.

L'expérience a montré que, au début de l'empalement des bulles sur la sonde, elles se déforment du 1/15 environ de leur diamètre. Les divers stades de l'empalement ont été repérés sur le signal délivré par la sonde.

CONCLUSION

CONCLUSION

La présente étude nous a permis d'aborder deux domaines importants et complémentaires de la mécanique des écoulements diphasiques :

a) le domaine théorique, avec l'élaboration d'un "modèle" ;

b) la métrologie, avec l'étude optique des perturbations créées dans l'écoulement par une sonde électrique.

Nous pouvons retenir les points suivants :

1. En utilisant la théorie mathématique des distributions, il est possible de transcrire dans un système d'équations unique, valable à tout instant en tout point du canal d'études, les principes de conservation de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie.

Ce système d'équations est formellement analogue (car au sens des distributions) au système qui sert de base à l'étude des écoulements monophasiques.

Ceci justifie le fait que des méthodes de calcul extrapolées de l'étude de ces derniers peuvent être utilisées pour déterminer les paramètres moyens de l'écoulement d'un fluide diphasique dans un canal.

2. Dans un canal de section constante, pour un écoulement gaz - liquide sans transfert de masse, tel que le liquide soit la phase qui mouille la paroi, la contrainte tangentielle à la paroi est une constante tout au long du canal, en dehors des discontinuités de pression.

Ce résultat théorique a été obtenu dans le cadre d'hypothèses facilement justifiables. Le fait que la contrainte tangentielle soit une constante tout au long du canal n'implique pas que la variation de pression statique soit également constante, car le mélange est compressible.

3. En utilisant la théorie asymptoptique du Professeur FORTIER, nous avons montré que le profil des vitesses moyennes et des débits massiques par unité de surface des phases avaient, aux forts nombres de Reynolds liquide, une forme logarithmique.

Les coefficients intervenant dans cette forme logarithmique sont, non des constantes universelles comme c'est le cas pour un écoulement monophasique, mais des fonctions d'un grand nombre de paramètres, en particulier du titre massique.

La forme du profil de taux de vide ne peut être déterminée théoriquement à l'aide des seules hypothèses qui ont été faites. Il est nécessaire de connaître la forme du glissement local.

4. Le coefficient de glissement, défini comme dans le cas d'un écoulement monophasique, à partir de la contrainte tangentielle à la paroi, est déterminé par une formule analogue à la formule de Karman-Nikuradzé. Là encore, les coefficients intervenant dans cette formule sont fonctions d'un grand nombre de paramètres sans dimension.

Aux faibles titres massiques, il est possible de donner une forme approchée du coefficient de frottement, en faisant une approximation au premier ordre en x (titre massique). Cette approximation peut être utilisée dans de nombreux cas dans le domaine des émulsions.

5. La perte de pression dans un canal de section constante peut être déterminée avec la connaissance des profils de vitesse moyenne et des débits massiques surfaciques des phases. Dans le cas où le canal est incliné ou vertical, la connaissance du glissement entre phases est également nécessaire.

6 . Trois expériences ont été réalisées qui nous ont permis d'étudier, d'une part l'intérêt et les limites d'application de différentes méthodes optiques utilisées pour la visualisation dans les écoulements diphasiques gaz - liquide à bulles, d'autre part, à l'intérieur des limites de ces méthodes, l'interaction des bulles avec l'extrémité sensible d'une sonde à variation d'impédance et la granulométrie de l'émulsion au voisinage de cette sonde.

7 . Un écoulement diphasique est un milieu d'autant plus diffusant qu'il contient plus de bulles.

Aux limitations propres aux moyens de mesure optiques (aberrations, résolution des systèmes, ...) s'ajoutent donc, dans les milieux diphasiques, des limitations dues à la diffusion de la lumière, correspondant à des pertes d'information. Ce fait reste valable quelque soit la méthode employée, qu'elle fasse appel à l'optique classique ou cohérente.

Les expériences que nous avons faites permettent de chiffrer ces limitations dans certains cas. Ainsi, à travers une épaisseur d'écoulement de 5 mm (distance de la paroi à la sonde dans l'expérience "V.E.E.") un taux de vide supérieur à 8 % ne permet pas de visualiser un phénomène dans des conditions convenables.

A travers une épaisseur d'écoulement de 1 mm (distance paroi- sonde dans une partie des essais de l'expérience "HOLOGRAPHIE"), un phénomène reste visible à un taux de vide de 50 %, mais avec une résolution extrêmement mauvaise.

A l'intérieur de ces limites, le choix de telle ou telle méthode optique doit être fait selon les moyens dont on dispose et le résultat que l'on veut obtenir.

Les méthodes basées sur l'optique classique font appel à un matériel relativement simple (lentilles, diaphragmes...) mais qui doit être positionné de façon précise. La source lumineuse peut être quelconque. L'appareillage d'enregistrement des résultats est

fonction non de la densité du milieu mais de sa vitesse, ce qui justifie les caméras que nous avons utilisées dans les expériences "I.B.S." et "V.E.E.".

Ces méthodes ne sont cependant valables que pour la visualisation de phénomènes d'autant plus localisés que les performances attendues (résolution, grossissement...) seront élevées.

L'holographie, par contre, permet de visualiser de grands volumes d'écoulement. Ceci permet en particulier, dans le cas des écoulements diphasiques, de connaître la dispersion, à un instant donné, des formes et des dimensions des bulles, ou encore de comparer la structure de l'écoulement dans une zone perturbée par un obstacle (tel qu'une sonde à variation d'impédance) à la structure de l'écoulement loin de cet obstacle. Cependant, la difficulté de la méthode provient de l'emploi obligé d'une source de lumière cohérente, c'est-à-dire d'un laser. C'est pour cette raison que l'expérience "HOLOGRAPHIE" a dû être réalisée à l'I.S.L.

8. Les trois expériences réalisées ("I.B.S.", "Holographie" et "V.E.E.") ont permis chacune d'appréhender une partie de l'étude de l'interaction des bulles et de la sonde à variation d'impédance. La réunion des résultats permet d'avoir une idée claire des phénomènes qui se produisent lorsqu'une bulle arrive sur une sonde.

a) Dans un écoulement d'émulsion dont le taux de vide est inférieur à 8 % et dont la vitesse est voisine de 10 m/s, les bulles n'ont pas de forme géométrique définie mais sont convexes dans leur majorité et peuvent être assimilées, en première approximation, à des sphères, dans un modèle simple.

Leurs diamètres varient entre quelques microns (points noirs sur les photographies) et deux millimètres environ pour les plus grosses. Le plus grand nombre (figures n° 6-11, 6-12 et 6-15) a son diamètre compris entre 500 μ et 1 mm.

Ces résultats sont déduits de l'observation des hologrammes réalisés et confirmés par les photographies des bulles loin de la sonde dans l'expérience "I.B.S.".

b) Lorsqu'une bulle approche de la sonde, elle se déforme en "pointant" vers celle-ci.Cette déformation, sensible à une distance égale environ à trois fois le rayon de la bulle, se maintient

lorsque celle-ci passe au voisinage de la sonde. Dans le cas où la bulle va s'empaler sur la sonde, la déformation se maintient jusqu'au contact bulle - sonde (voir photographie n° 5-33).

La cause de cette déformation n'est pas déterminée. Il a cependant été vérifié qu'il ne s'agit pas d'un phénomène électro-magnétique.

c) Lorsqu'une bulle commence à s'empaler, elle se déforme en s'aplatissant d'une quantité comprise entre le 1/10 et le 1/15 du diamètre traversé par la sonde.

Puis la bulle poursuit son empalement en se translatant sans déformation supplémentaire. C'est ce qui a été représenté sur la figure 7-15 à partir des observations effectuées dans l'expérience V.E.E.

ANNEXES

ANNEXE I

QUELQUES RAPPELS SUR LA THEORIE DES DISTRIBUTIONS

1. Définition [54], [57]

La notion de distribution apparaît dans de nombreuses branches de la physique.

En électrostatique, par exemple, le potentiel en un point origine :

$$V_o = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\left[\sum_i \frac{q_i}{r_i} + \iint_S \frac{\sigma(r)}{r}\,ds + \iiint_\gamma \frac{\rho(r)}{r}\,dv\right]$$

résulte d'un ensemble de charges ponctuelles q_i, densités de charges superficielles σ et volumiques ρ, situées à des distances r de l'origine, S et γ étant les surfaces et volumes chargés.

On peut remarquer que les distributions superficielles et ponctuelles de charge peuvent s'obtenir comme limites d'une distribution volumique lorsqu'on fait tendre, à charge constante, le volume vers zéro.

Prenons un exemple à une dimension.

Soit $\rho_K(x) = K\,\pi(Kx)$ une suite de densités de charges.

$\pi(x)$ est la fonction porte définie par

$$\pi(x) = \begin{cases} 0 & \text{pour } x > 1/2 \\ 1/2 & \text{pour } x = 1/2 \\ 1 & \text{pour } x < 1/2 \end{cases}$$

La charge totale $Q = \int \rho_K (x)\, d\,x$ reste égale à l'unité quelle que soit la valeur de K.

En particulier, lorsque K tend vers l'infini la charge totale est concentrée à l'origine. On représente classiquement cette charge par

$$\delta(x) = \begin{cases} 0 & \text{pour } x \neq 0 \\ \infty & \text{pour } x = 0 \end{cases} \qquad \text{telle que } \int \delta(x)\, d\,x = 1$$

ce qui est absurde car l'intégrale d'une fonction presque partout nulle est nulle.

En fait l'expérimentateur est incapable de déterminer $\rho(x)$ en chaque point. Il n'y accède que par ses propriétés, c'est-à-dire en déterminant toute une série de scalaires tels que :

- la charge totale $Q = \int \rho\, d\,v$
- le potentiel à l'origine $V_o = \frac{1}{4\pi\,\varepsilon_o} \int \frac{\rho}{r}\, d\,v$
- l'énergie totale $\mathcal{U} = \frac{1}{2} \int \rho\, V\, d\,v$

Ceci amène donc à considérer une distribution comme un opérateur faisant correspondre un scalaire (Q, V_o ou $\mathcal{U}$) à une fonction (1, 1/r ou V), donc une fonctionnelle.

Une fonctionnelle est définie par le résultat de son application, en tant qu'opérateur, à tout un ensemble de fonctions, appelées "fonctions tests". Plus les conditions de régularité imposées aux fonctions test seront sévères, plus les fonctionnelles définies seront générales.

C'est pourquoi les distributions ont été définies comme fonctionnelles linéaires et continues sur l'espace $\mathcal{D}$ des fonctions $\varphi(x)$ indéfiniment dérivables et à support borné.

Parmi ces fonctions, l'exemple le plus simple est

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0 & \text{pour } |x| \geqslant 1 \\ \exp \dfrac{1}{x^2 - 1} & \text{pour } |x| < 1 \end{cases}$$

de support $[-1, +1]$.

2. Distributions régulières et singulières

a) Distributions régulières

A toute fonction f $(\vec{M}, t)$ localement sommable on peut faire correspondre une distribution par la relation :

$$< f, \varphi > = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{R^3} f(\vec{M}, t)\ \varphi(\vec{M}, t)\ dt\ dv$$

Une telle distribution est régulière.

On a alors le théorème suivant : Deux fonctions localement sommables définissent la même distribution si, et seulement si, elles sont presque partout égales.

b) Distributions singulières

La mesure de Dirac est aussi une distribution.

Les mesures temporelles $\delta(t - t_I)$ et spatiale δ_I sont définies par :

$$< \delta(t - t_I), \varphi > = \int_{R^3} \varphi(\vec{M}, t_I)\ d\ v$$

$$< \delta_I, \varphi > = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{\Sigma_I} \varphi(M, t)\ dt\ d\sigma$$

où Σ_I est la surface de discontinuité.

3. Dérivées d'une distribution

a) Définition

Par définition $< \frac{\partial f}{\partial x_i}, \varphi > = - < f, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} >$ où $x_i = x, y, z$ ou t.

b) Première expression de $\frac{\partial f}{\partial t}$ où f présente des discontinuités pour $t = t_{I_n}$ $(n \in |-\infty, +\infty|)$

Appliquons la définition

$$\left\langle \frac{\partial f}{\partial t} , \varphi \right\rangle = -\left\langle f, \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right\rangle = - \int_{TR^3} f \frac{\partial \varphi}{\partial t} \, dv \, dt$$

$$= - \int_{R^3} \sum_{-\infty}^{+\infty} \left[f \varphi \right]_{t_{In}(M)}^{t_{In+1}(M)} + \int_{TR^3} \left| \frac{\partial f}{\partial t} \right| \varphi \, dv \, dt$$

où $\left| \frac{\partial f}{\partial t} \right|$ représente la dérivée de f en tout point où f ne présente pas de discontinuité (la mesure des discontinuités étant nulle).

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} \left[f \varphi \right]_{t_{In}(M)}^{t_{In+1}(M)} = - \sum_{-\infty}^{+\infty} \left[f \left(t_{In_+}(M), M \right) - f \left(t_{I_{n-}}(M), M \right) \right] \varphi(t_{In}, M)$$

$$= - \sum_{-\infty}^{+\infty} \sigma_f^{(n)} \varphi \left(t_{In}(M), M \right)$$

en posant $\sigma_f^{(n)} = f \left(t_{In_+}, M \right) - f \left(t_{In-}, M \right)$ (saut de f)

Donc :

$$\left\langle \frac{\partial f}{\partial t}, \varphi \right\rangle = \left\langle \left| \frac{\partial f}{\partial t} \right| , \varphi \right\rangle + \int_{R^3} \sum \sigma_f^{(n)}(M) \, \varphi \left(t_{In}(M), M \right) dv$$

$$= \left\langle \left| \frac{\partial f}{\partial t} \right| , \varphi \right\rangle + \left\langle \sum_{-\infty}^{+\infty} \sigma_f^{(n)}(M) \, \delta \left(t - t_{In}(M) \right), \varphi \right\rangle$$

On en déduit donc que :

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \left| \frac{\partial f}{\partial t} \right| + \sum_{-\infty}^{+\infty} \sigma_f^{(n)}(M) \, \delta \left[t - t_{In}(M) \right]$$

c) <u>Deuxième expression de</u> $\frac{\partial f}{\partial t}$

$$< \frac{\partial f}{\partial t} , \varphi > = < \left| \frac{\partial f}{\partial t} \right|, \varphi > + \int_{R^3} \sum_{-\infty}^{+\infty} \left| f\,(t_{In_+} , M) - f(t_{I_{n-}} , M) \right.$$

$$\left. \varphi(t_{In} , M) \right| dv$$

Or $t = t_{In}\,(M)$ est l'équation d'une partie de l'interface $\sum_{I_p}$, comme le montre la figure A I-1.

Soit $\overrightarrow{V_I}\,(M, t)$ la vitesse d'un élément de surface $d\sigma$ et $\vec{n}\,(M, t)$ la normale extérieure à $d\sigma$

On a : $$1 + \overrightarrow{V_I}\,(M, t)\,\frac{\partial t_{In}\,(M)}{\partial \vec{M}} = 0$$

c'est-à-dire : $$1 + \overrightarrow{V_I} \cdot \vec{n}\ \left| \vec{\nabla}\, t_{In}\,(M) \right| = 0$$

donc : $$\vec{\nabla}\, t_{In}\,(M) = - \frac{\vec{n}}{\vec{n} \cdot \overrightarrow{V_I}}$$

On peut donc écrire :

$$< \frac{\partial f}{\partial t} , \varphi > = < \left| \frac{\partial f}{\partial t} \right| , \varphi > + \int_T \sum_{\text{Interfaces}} \int_{\Sigma_{I_p}} \left[f_+\,(t, M) - f_-\,(t, M) \right]$$

$$\frac{\varphi(t, M)\, dt\, d\sigma}{\left| \vec{\nabla}\, t_{In}\,(M) \right|}$$

$$= < \left| \frac{\partial f}{\partial t} \right| , \varphi > - \sum_{\text{Interfaces}} \int_T \int_{\Sigma_{I_p}} \sigma'_f\, \overrightarrow{V_I} \cdot \vec{n}\, \varphi(t,M) dt\, d\sigma$$

où $\sigma'_f = f_+\,(t, M) - f_-(t, M)$

Le signe + représente le côté de l'interface vers lequel est orienté le vecteur normal $\vec{n}$.

On en déduit que

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \left| \frac{\partial f}{\partial t} \right| - \sum_{\text{Interfaces}} \sigma'_f\,(M, t)\, \overrightarrow{V_I} \cdot \vec{n}\ \delta_I$$

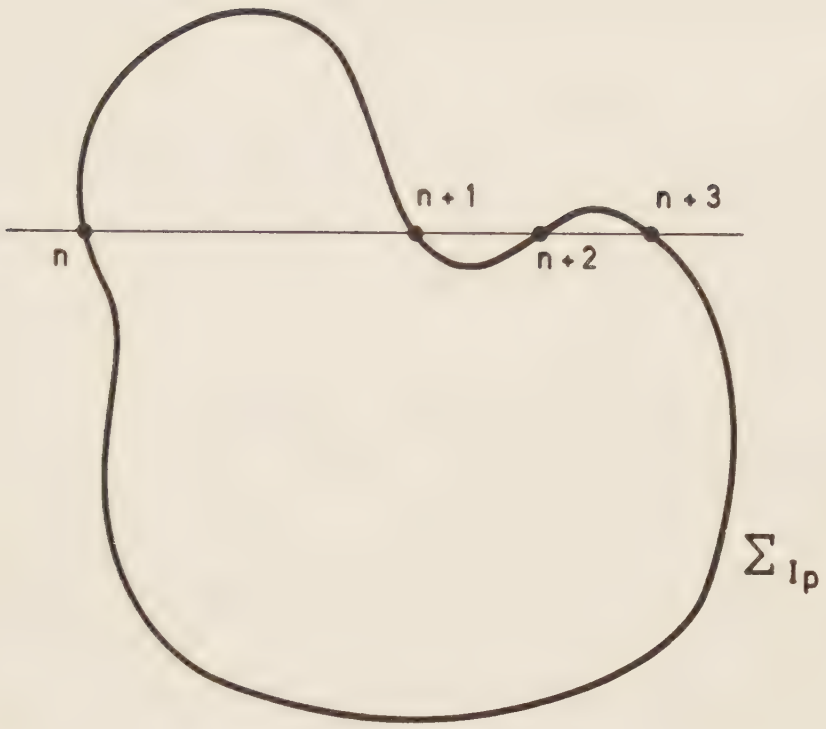


Fig. AI . 1

σ_f et σ'_f sont liés par la relation $\sigma'_f = (-1)^n \sigma_f$ où n est pair quand $\vec{n} \cdot \overrightarrow{V_I} \geqslant 0$ et n est impair quand $\vec{n} \cdot \overrightarrow{V_I} \leqslant 0$, relation qui résulte de leurs définitions.

Il est évident que les deux expressions obtenues pour $\frac{\partial f}{\partial t}$ sont équivalentes.

On en déduit donc que :

$$\sum_{\text{Interfaces}} \sigma_f (M, t) \overrightarrow{V_I} \cdot \vec{n} \, \delta_I = \sum_{-\infty}^{+\infty} (-1)^n \sigma_f \, \delta \left[t - t_{In} (M) \right]$$

et que :

$$\sum_{\text{Interfaces}} \sigma_f (M, t) \, \delta_I = \sum_{-\infty}^{+\infty} (-1)^n \frac{\sigma_f}{\vec{n} \cdot \overrightarrow{V_I}} \, \delta \left[t - t_{In} (M) \right]$$

d) Dérivées par rapport à $x_i = x$, y ou z

Des calculs analogues aux précédents montrent que :

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \left| \frac{\partial f}{\partial x_i} \right| + \sum_{\text{Interfaces}} \sigma_f \, \vec{n} \cdot \vec{x_i} \, \delta_I$$

$$= \left| \frac{\partial f}{\partial x_i} \right| + \sum_{-\infty}^{+\infty} (-1)^n \sigma_f \frac{\vec{n} \cdot \vec{x_i}}{\vec{n} \cdot \overrightarrow{V_I}} \, \delta \left[t - t_{In} (M) \right]$$

4. Produit de convolution

Le produit de convolution de deux distributions S et T est défini par :

$$\langle S * T, \varphi \rangle = \langle S (\vec{M}, t) \cdot T (\vec{M}' t'), \varphi (\vec{M} + \vec{M}' , t + t') \rangle$$

Dans le cas de fonctions localement sommables cette définition se ramène à la définition habituelle

$$f * g = \int f (\tau) \, g (t - \tau) \, d\tau$$

Le produit de convolution n'existe pas toujours. Cependant il a un sens si l'une des distributions est à support borné.

La dérivée d'un produit de convolution est telle que $(f * g)' = f' * g = f * g'$.

ANNEXE II

TRANSFERT MOYEN AUX INTERFACES D'UNE GRANDEUR f DANS UN ECOULEMENT A PETITES BULLES

Nous avons montré, dans une précédente étude [59] que l'on peut exprimer les termes de transfert moyen aux interfaces d'une grandeur f sous une forme intégrale en exploitant les propriétés statistiques (granulométrie, distribution des vitesses...) de l'ensemble des bulles passant au point d'étude.

Selon la valeur donnée à f, la relation obtenue permet de déterminer l'évolution spatiale du taux de vide, les termes de transfert de la pression, ou ceux des tenseurs des contraintes aux interfaces...

Nous rappelons dans cette annexe la méthode employée dans [59]. Les résultats sont cependant plus corrects dans la mesure où nous avons tenu compte ici de la rotation des bulles.

Nous avons supposé pour faire ce calcul :

a) qu'il n'y a pas de transfert de masse entre phases ;

b) que les dimensions des bulles sont très inférieures aux dimensions du canal.

1. Généralités

Le terme de transfert moyen aux interfaces de la grandeur f s'exprime par la relation :

$$\overline{f \vec{\nabla} \chi_K} = \frac{1}{T} \sum_{N_1}^{N_2} (-1)^p \left(\frac{\vec{n} \quad f_I}{\vec{n} \cdot \vec{V}_I} \right)_p \qquad \text{(A II-1)}$$

(Les notations sont celles du chapitre 1)

Cette relation peut être mise sous la forme

$$\overline{f \vec{\nabla} X_K} = \frac{\alpha_K}{t_K} \left[\frac{\widetilde{\vec{n} f_I}^{2p}}{\vec{n} \cdot \vec{V_I}} - \frac{\widetilde{\vec{n} f_I}^{2p+1}}{\vec{n} \cdot \vec{V_I}} \right] \qquad \text{(A II-2)}$$

$\widetilde{G}^{2p}$ et $\widetilde{G}^{2p+1}$ sont les moyennes sur les interfaces respectivement sortantes et entrantes d'une grandeur G et sont définies par

$$\widetilde{G}^{2p} = \frac{1}{N_I(T)/2} \sum_{N_1}^{N_2} G_{2p} = \frac{\overline{t_K}}{\alpha_K T} \sum_{N_1}^{N_2} G_{2p}$$

$$\widetilde{G}^{2p+1} = \frac{1}{N_I(T)/2} \sum_{N_1}^{N_2} G_{2p+1} = \frac{\overline{t_K}}{\alpha_K T} \sum_{N_1}^{N_2} G_{2p+1}$$

$N_I(T)$: nombre d'interfaces passant en M pendant le temps T.

$N_K(T)$: nombre de fois où la phase K passe en M pendant le temps T.

$\overline{t_K}$: moyenne du temps de passage en M de la phase K.

$N_I(T)$, $N_K(T)$ et $\overline{t_K}$ sont reliés par la relation

$$\frac{N_I(T)}{T} = \frac{2 N_K(T)}{T} = \frac{2 \alpha_K}{\overline{t_K}}$$

Pour aller plus loin, la méthode que nous avons utilisée consiste :

a) A grouper les bulles passant en M en classes de bulles identiques, que nous remplaçons par une bulle identique unique, centrée en M ("bulle de référence") de volume $\mathcal{V}_g$ et de surface $\sum$. Le passage d'une bulle réelle de centre G $(\vec{n})$ à la bulle de référence se fait par la translation de vecteur $\overrightarrow{G M}$, le translaté de M étant le point I.

Cette bulle de référence (fictive) doit posséder les propriétés statistiques de toutes les bulles qu'elle représente.

Ainsi la valeur en I d'une grandeur F quelconque doit être déterminée en fonction de sa valeur sur les bulles réelles.

Si $F_g = \frac{1}{\gamma_g} \int_{\gamma_g} F \, dv$ est la moyenne de F sur la bulle de référence et F'_I la fluctuation de F en I par rapport à F_g, nous avons

$$F_I = F_g - (\overrightarrow{M\,I} \cdot \vec{\nabla})\, F_g + F'_I$$

où le terme $(\overrightarrow{M\,I} \cdot \vec{\nabla})\, F_g$ tient compte de la translation faisant passer des bulles réelles à la bulle de référence.

En particulier la vitesse en I est égale à

$$\overrightarrow{V_I} = \overrightarrow{V_g} - (\overrightarrow{M\,I} \cdot \vec{\nabla})\, \overrightarrow{V_g} + \overrightarrow{V'_I}$$

Pour compléter cette représentation, il est nécessaire d'affecter chaque point de la surface de la bulle de référence d'une certaine probabilité d'"impact", l'impact caractérisant l'angle sous lequel la bulle réelle arrive en M (donc l'orientation du vecteur normal unitaire $\vec{n}$ à la surface de la bulle).

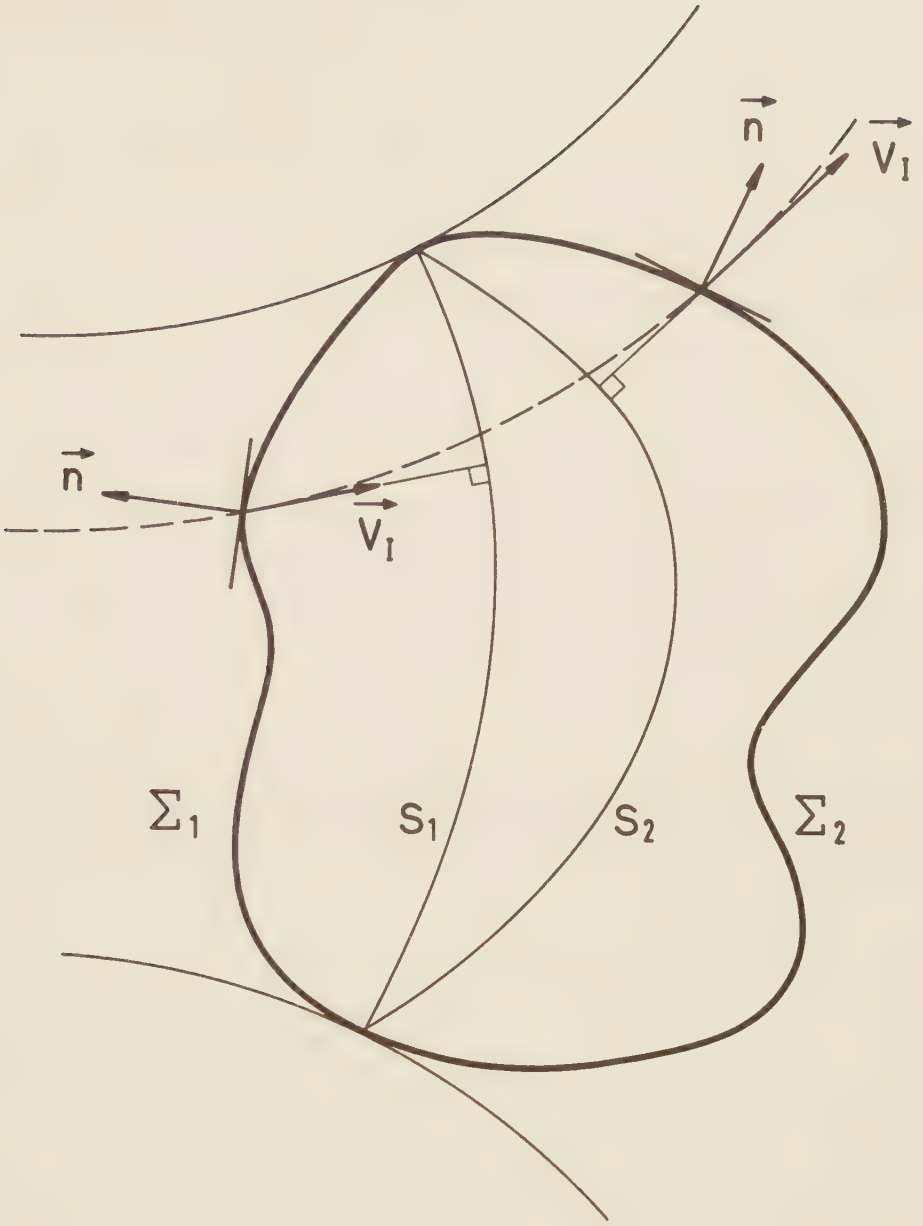
Pour cela nous avons défini les surfaces d'impact S comme les surfaces perpendiculaires aux vitesses d'interface (voir figure A II-1).

La probabilité d'impact $P(\vec{n})\, dS(\vec{n})$ est la probabilité pour que la bulle réelle centrée en G ait l'homologue de son point d'impact dans la bulle de référence qui appartienne à l'élément $dS(\vec{n})$ de la surface d'impact S.

b) A remplacer l'ensemble des bulles d'une classe par sa bulle de référence et la partie de la sommation de la formule (A II-1) qui correspond à cette classe par une intégration sur la surface Σ de la bulle de référence.

Puis à moyenner sur l'ensemble des classes de bulles on obtient alors :

$$\overline{f\,\vec{\nabla}\,X_g} = -\frac{\alpha}{tg}\left[\int_{\Sigma_1} \frac{\vec{n}\,f_I}{|\vec{V}_I|} P_1(\vec{n})\, d\sigma + \int_{\Sigma_2} \frac{\vec{n}\,f_I}{|\vec{V}_I|} P_2(\vec{n})\, d\sigma\right] \quad \text{(AII-3)}$$



Σ_1 interface entrante

Σ_2 interface sortante

S_1 surface d'impact entrante

S_2 surface d'impact sortante

Fig. A II . 1

La double barre représente ici une moyenne sur l'ensemble des classes de bulles.

c) A exploiter les hypothèses du cas étudié. Nous avons supposé que les bulles étaient de dimensions très inférieures aux dimensions du canal, ce qui nous permet d'admettre que, sur chaque surface d'impact, tout impact est équiprobable. Nous avons donc

$$P_1(\vec{n}) = \frac{1}{S_1} \quad \text{et} \quad P_2(\vec{n}) = \frac{1}{S_2} .$$

Après avoir décomposé la vitesse d'interface en translation, rotation et expansion, des calculs analogues à ceux qui sont menés dans [59] nous conduisent à la relation :

$$\overline{\overline{f \vec{\nabla} X_g}} = \frac{\alpha}{tg} tg \left\{ - \frac{1}{\mathcal{V}_g} \int_{\Sigma} f'_I \vec{n} \, d\sigma + \operatorname{div} f_g + \frac{f_g}{|\vec{V}_g|} \vec{k} \left[(\operatorname{div} \vec{V})_g - \operatorname{div} \vec{V}_g \right] \right.$$

$$\left. + \frac{f_g \vec{k}}{|\vec{V}_g|} \wedge \left[\frac{1}{2} \left[(\overrightarrow{\operatorname{rot} V})_g - \operatorname{rot} \vec{V}_g \right] + \left[\vec{k} : \left((\bar{\bar{\varepsilon}})_g - \bar{\bar{\varepsilon}}_g \right) \right] \wedge \vec{k} \right] \right\}$$

(A II-4)

avec $$\frac{1}{tg} \overline{\overline{tg \, \varphi_g}} = \bar{\varphi}^g$$

dans laquelle :

$\vec{k}$ est le vecteur unitaire dans la direction de la vitesse moyenne des bulles : $\vec{V}_g = |\vec{V}_g| \, \vec{k}$

$\bar{\bar{\varepsilon}}$ représente le tenseur des déformations : ainsi

$$(\bar{\bar{\varepsilon}})_g = \frac{1}{\mathcal{V}_g} \int_{\mathcal{V}_g} \bar{\bar{\varepsilon}} \, dv$$

$$\bar{\bar{\varepsilon}}_{g_{ij}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \overline{u_i}^g}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{u_j}^g}{\partial x_i} \right)$$

2. Applications

L'exploitation complète de la relation (A II-4) nécessite la connaissance de l'ensemble des propriétés statistiques des bulles

(granulométrie, distribution des vitesses...). Le cas le plus simple est évidemment celui où toutes les bulles passant au point d'étude ont des caractéristiques identiques (forme, dimensions, vitesses...) en première approximation.

Dans ce cas :

$$\overline{f\,\vec{\nabla}\,X_g} = -\frac{\alpha}{\gamma_g}\int_\Sigma f'_I\,\vec{n}\,d\sigma + \alpha\,\mathrm{div}\,\overline{f}^g + \overline{f}^g\,.\,\vec{\nabla}\,\alpha \qquad \text{(A II-5)}$$

$\vec{\nabla}\,\alpha$ étant obtenu en faisant f = 1.

Les applications sont alors simples :

a) Si l'on suppose que la pression p est constante à tout instant dans chaque bulle (bulles isobares) $p'_I = 0$ et le terme de transfert des forces de pression est égal à

$$\overline{p\,\vec{\nabla}\,X_g} = \vec{\nabla}\,\alpha\,\overline{p}^g$$

b) Le terme de transfert aux interfaces du tenseur des contraintes s'écrit :

$$\overline{\overline{\tau}\,.\,\vec{\nabla}X_g} = -\frac{\alpha}{\gamma_g}\int_\Sigma \overline{\tau}'_I\,.\,\vec{n}\,d\sigma + \mathrm{div}\,\alpha\,\overline{\overline{\tau}}^g$$

Or $\int_\Sigma \overline{\tau}'_I\,.\,\vec{n}\,d\sigma$ est la force exercée par la bulle sur le liquide. Nous admettrons qu'elle est de la forme $K_1\,\mu_L\,|\overline{V}^g - \overline{V}^L|^m\,(\overline{V}^g - \overline{V}^L)\,a$ où a est le diamètre équivalent de la bulle.

Le volume de la bulle est égal à $\gamma_g = K_2\,a^3$.

On a alors :

$$\overline{\overline{\tau}\,.\vec{\nabla}\,X_g} = -\frac{\alpha\,K\,\mu_L\,|\overline{V}^g - \overline{V}^L|^m\,(\overline{V}^g - \overline{V}^L)}{a^2} + \mathrm{div}\,\alpha\,\overline{\overline{\tau}}^g$$

c) Forces dues à la tension superficielle : $\overline{\frac{2\sigma}{a}\,\vec{\nabla}\,X_g}$.

En supposant les bulles sphériques $\int_\Sigma \left(\frac{\sigma}{R}\right)'\,\vec{n}\,d\sigma = 0$.

Donc $\overline{\frac{2\sigma}{a}\,\vec{\nabla}X_g} = 2\,\alpha\,\vec{\nabla}\left(\frac{\sigma}{a}\right) + \frac{2\sigma}{a}\,\vec{\nabla}\,\alpha$

Nous admettrons que σ est une constante et que le gaz est parfait, donc $\bar{p}^g \; a^3 =$ cste d'où

$$\frac{\vec{\nabla}\, \bar{p}^g}{\bar{p}^g} + 3 \frac{\vec{\nabla} a}{a} = 0$$

On en déduit :

$$\overline{\frac{2\sigma}{a} \vec{\nabla} X_g} = \frac{2\sigma}{a} \left[\frac{\alpha \nabla \bar{p}^g}{3 \bar{p}^g} + \vec{\nabla} \alpha \right]$$

$$= \frac{2 \alpha \sigma}{3 a} \vec{\nabla} \text{ Log } (\bar{p}^g \; \alpha^3)$$

d) Variation spatiale du taux de vide.

En faisant f = 1 dans la formule (A II-4) et dans l'hypothèse de bulles aux caractéristiques identiques, on obtient :

$$\overline{\vec{\nabla} X_g} = \vec{\nabla} \alpha = \frac{\alpha}{|\bar{V}^g|} k \, (\overline{\text{div } V}^g - \text{div } \bar{V}^g)$$

$$+ \frac{\alpha \vec{k}}{|\bar{V}^g|} \wedge \left\{ \frac{1}{2} (\overline{\text{rot } V}^g - \text{rot } \bar{V}^g) + \left[\vec{k} : (\bar{\bar{\varepsilon}}^g - \bar{\bar{\varepsilon}}^g) \right] \wedge \vec{k} \right\}$$

où $$(\bar{\bar{\varepsilon}}^g)_{ij} = \frac{1}{2} \left[\frac{\overline{\partial u_i}^g}{\partial x_j} + \frac{\overline{\partial u_j}^g}{\partial x_i} \right]$$

$$(\bar{\bar{\varepsilon}}^g)_{ij} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial \overline{u_i}^g}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{u_j}^g}{\partial x_i} \right]$$

Plaçons-nous dans un repère lié à la vitesse moyenne du gaz : soit $\vec{S}_1$ la coordonnée dans la direction de la vitesse moyenne du gaz ($\vec{S}_1 = \vec{k}$) et $\vec{S}_2$ et $\vec{S}_3$ les coordonnées dans un plan perpendiculaire à $\vec{S}_1$. Posons $\vec{V} = u_i \vec{S}_i$ (sommation d'Einstein) et $|\bar{V}^g| = \bar{u}^g$.

Nous avons alors :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \alpha}{\partial S_1} = \dfrac{\alpha}{\bar{u}^g} \left[\dfrac{\overline{\partial u_i}^g}{\partial S_i} - \dfrac{\partial \bar{u}^g}{\partial S_1} \right] & \text{(a)} \\ \dfrac{\partial \alpha}{\partial S_2} = \dfrac{\alpha}{\bar{u}^g} \left[\dfrac{\overline{\partial u_1}^g}{\partial S_2} - \dfrac{\partial \bar{u}^g}{\partial S_2} \right] = \dfrac{\alpha}{\bar{u}^g} \dfrac{\overline{\partial}^g}{\partial S_2} (u_1 - \bar{u}^g) & \text{(b)} \\ \dfrac{\partial \alpha}{\partial S_3} = \dfrac{\alpha}{\bar{u}^g} \left[\dfrac{\overline{\partial u_1}^g}{\partial S_3} - \dfrac{\partial \bar{u}^g}{\partial S_3} \right] = \dfrac{\alpha}{\bar{u}^g} \dfrac{\overline{\partial}^g}{\partial S_3} (u_1 - \bar{u}^g) & \text{(b')} \end{cases}$$

La relation (a) correspond à l'équation de continuité du gaz : $\operatorname{div} \alpha \bar{p}^g \bar{V}^g = 0$, soit $\dfrac{\partial \alpha}{\partial S_1} = \dfrac{\alpha}{\bar{p}^g \bar{u}^g} \dfrac{\partial \bar{p}^g \bar{u}^g}{\partial S_1}$, d'où $\alpha \bar{p}^g \bar{u}^g = C(S_2, S_3)$.

Quant aux relations (b) et (b') elles expriment la variation radiale du taux de vide.

- Dans un gradient radial de vitesse moyenne nulle ($\bar{u}^g = \bar{u}^g(s_1)$), on peut admettre que la rotation des bulles est indépendante de cette vitesse moyenne, donc que $\dfrac{\partial (u_1 - \bar{u}^g)}{\partial S_i}$ ($i = 2, 3$) est de la forme $A_i S_i^m$ où m est un nombre impair, pour tenir compte de la symétrie de l'écoulement par rapport au centre du canal ($S_i = 0$) et positif ou nul (pour $S_i = 0$ la dérivée de α par rapport à S_i ne peut être infinie).

On en déduit que $\dfrac{\partial \alpha}{\partial S_i} = \dfrac{\alpha}{\bar{u}^g} A_i S_i^m$,

donc $\alpha = \alpha_c \exp \dfrac{A_i}{\bar{u}^g} \dfrac{S_i^{m+1}}{m+1}$

- Si le gradient de vitesse moyenne est différent de zéro, nous admettrons que

$$\frac{\partial (u_1 - \bar{u}^g)}{\partial S_i} = A_i \; S_i^{\,m} + B_i \; \frac{\partial \bar{u}^g}{\partial S_i}$$

donc $$\frac{\partial \alpha}{\partial S_i} = \frac{\alpha}{\bar{u}^g} \left(A_i \; S_i^{\,m} + B_i \; \frac{\partial \bar{u}^g}{\partial S_i} \right)$$

ce qui donne :

$$\frac{\alpha}{(\bar{u}^g)^{B_i}} = D\,(S_1)\, \exp \int_{S_i}^{B_i} \frac{A_i \; S_i^{\,m}}{\bar{u}^g} \; d\, S_i$$

(B_i étant la coordonnée de la paroi sur l'axe S_i).

Nous voyons que, nécessairement $B_i > 0$ si le liquide mouille la paroi.

La représentation graphique de α est donc celle qui est indiquée sur la figure A II-2.

Des profils de cette forme ont été déterminés par des observations expérimentales [60].

Le cas où les bulles passant au point d'étude ont des caractéristiques très différentes est plus complexe à étudier, et nécessite la connaissance expérimentale des distributions statistiques des diamètres équivalents, des vitesses...

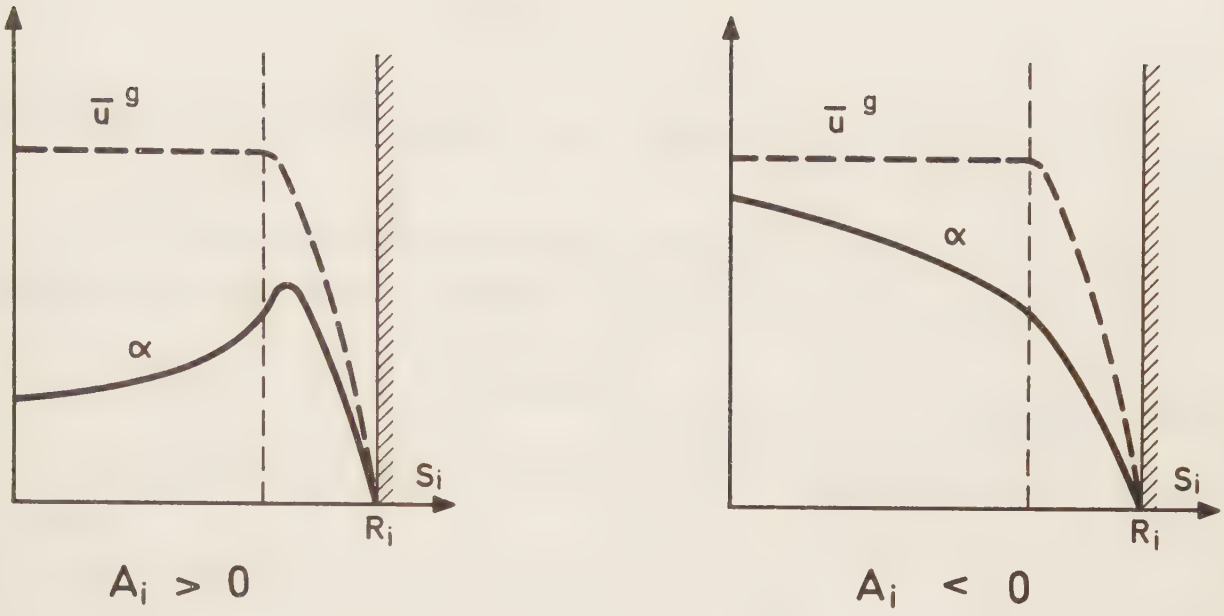


Fig. A II . 2

ANNEXE III

COEFFICIENT DE FROTTEMENT AU VOISINAGE DU TITRE x = 0.

L'étude faite au chapitre 2 paragraphe VII montre que le coefficient de frottement f est donné par une relation de la forme

$$\sqrt{\frac{2}{f}} = Go\left(\pi_1, M_L\sqrt{\frac{f}{2}}\right) \text{Log } Re_L\sqrt{\frac{f}{2}} + Ho\left(\pi_1,\pi_2,M_L\sqrt{\frac{f}{2}}\right) \quad \text{(A-IV-1)}$$

où π_1 et π_2 sont des paramètres adimensionnels parmi lesquels se trouve le titre x

M_L est le nombre de Mach liquide : $M_L = \dfrac{U_L}{\sqrt{r\,T}}$

ReL est le nombre de Reynolds liquide : $Re_L = \dfrac{4e\,U_L}{\nu_L}$

Si l'on admet que l'influence du nombre de Mach est faible, ce qui doit être vérifié aux vitesses très inférieures à la vitesse du son du gaz, la relation (A IV -1) devient analogue à celle de Karman-Nikuradzé.

Les coefficients G_o et H_o qui y sont introduits ne sont cependant pas égaux aux constantes universelles 2,45 et 3,9, mais sont fonctions notamment du titre massique x. Quand celui-ci est nul, la seule phase qui évolue dans le canal est le liquide. G_o (x = O) et H_o(x = O) sont donc égales à ces constantes universelles.

Il est intéressant de déterminer une approximation du coefficient de frottement qui soit valable pour les faibles titres. Nous développerons donc f linéairement en fonction du titre, en posant $f = f_L(1+\lambda x+o(x^2)$.

a) Développons de même G_o et H_o linéairement au voisinage de x = O.

$$G_o = G_o\,(O) + G'_o\,(O)\,x + O\,(x^2)$$
$$H_o = H_o\,(O) + H'_o\,(O)\,x + O\,(x^2)$$

Il vient alors, en négligeant les termes d'ordre supérieur à 1.

$$\sqrt{\frac{2}{f_L}}\left(1 - \frac{\lambda}{2}\, x\right) = \left[G_o(O) + G'_o(O)\, x\right] \operatorname{Log} Re_L \sqrt{\frac{f_L}{2}}\left(1 + \frac{\lambda}{2}\, x\right)$$

$$+ \left(H_o(O) + H'_o(O)\, x\right)$$

$$= \left[G_o(O) + G'_o(O)\, x\right]\left[\operatorname{Log} Re_L \sqrt{\frac{f_L}{2}} + \frac{\lambda}{2}\, x\right]$$

$$+ H_o(O) + H'_o(O)\, x$$

$$= \sqrt{\frac{2}{f_L}} + \left[G'_o(O) \operatorname{Log} Re_L \sqrt{\frac{f_L}{2}} + \frac{\lambda}{2} G_o(O) + H'_o(O)\right] x$$

On en déduit que :

$$\lambda = -2 \frac{G'_o(O) \operatorname{Log} Re_L \sqrt{\frac{f_L}{2}} + H'_o(O)}{G_o(O) \operatorname{Log} Re_L \sqrt{\frac{f_L}{2}} + H_o(O) + G_o(O)}$$

b) Une expression plus simple peut être obtenue en partant de la formule de Blasius $f = f_o (Re_L)^n$ dont la représentation graphique se confond avec celle de la formule de Nikuradzé pour une large plage de nombres de Reynolds (10^4 - 10^5).

Développons les coefficients f_o et n au voisinage de zéro :

$f_o = f_o(O) + x\, f'_o(O)$

$n = n(O) + x\, n'(O)$

On sait que $f_L = f_o(O)\, Re_L^{\,n(O)}$

On a donc :

$$f = \left|f_o(O) + x\, f'_o(O)\right| Re_L^{\,n(O) + x\, n'(O)}$$

$$= \left|f_o(O) + x\, f'_o(O)\right| Re_L^{\,n(O)} (1 + x n'(O) \operatorname{Log} Re_L)$$

$$= \left[1 + \frac{f'_o(O) + n'(O) \operatorname{Log} Re_L}{f_o(O)}\, x\right] f_L$$

ANNEXE IV

VARIATION DE PRESSION PAR ACCELERATION.

Nous avons donné dans le chapitre 2 (paragraphes VIII et IX) une expression de la variation de pression par accélération obtenue par intégration sur la section de passage de l'écoulement de la variation du débit de quantité de mouvement $\overline{\rho u} \cdot \bar{u}$, expression de la forme :

$$\left(\frac{d\bar{p}}{dx_1} \right)_a = - r\, T \times M_L^2 \left(1 + b \frac{f}{2} \, Ao^2 \right) \frac{d}{dx_1} \left(\frac{1}{\bar{p}} \right) \qquad (A\ V - 1)$$

où b est un coefficient égal à 1 si le canal considéré à une section rectangulaire allongée, et b égale 5/2 si le canal a une section circulaire.

Le but de cette annexe est de montrer que, compte-tenu de la relation exprimant le taux de vide entre phases

$$\langle \alpha \rangle = \frac{x}{Co\ x + \left(Co + \frac{V^\infty}{U_L} \right) \frac{\bar{p}}{\rho_L\, r\, T}} \qquad (A\ V - 2)$$

utilisée dans le chapitre 3 (paragraphe V (2)), l'expression A V -1 est comparable, dans le cadre des hypothèses du chapitre 2 (notamment : écoulement sans transfert de masse, titre très inférieur à 1, pression supérieure à la pression atmosphérique) aux expressions rencontrées habituellement dans la littérature.

Les notations utilisées ici sont celles du chapitre 2.

1. - Modèle homogène monodimensionnel.

Dans ce modèle, dont nous avons vu dans l'introduction de la première partie les hypothèses constitutives, la variation de pression par accélération prend la forme :

$$- \left(\frac{d\bar{p}}{dx_1} \right)_a = M^2 \frac{d}{dx_1} \left(\frac{1}{\rho_m} \right)$$

où M est le débit massique total par unité de surface et ρ_m est la masse volumique moyenne du mélange, exprimée par :

$$\frac{1}{\rho_m} = \frac{x}{\rho_g} + \frac{1 - x}{\rho_L} = \frac{x\ r\ T}{\bar{p}} + \frac{1 - x}{\rho_L}$$

Nous voyons tout de suite que :

$$-\left(\frac{d\bar{p}}{dx_1}\right)_a = x\ r\ T\ M^2 \frac{d}{dx_1}\left(\frac{1}{\bar{p}}\right) \simeq x\ r\ T\ M_L^2 \frac{d}{dx_1}\left(\frac{1}{\bar{p}}\right) \qquad (A\ V - 3)$$

expression de la même forme que l'expression (A V - 1)

2. - Modèle à phases séparées.

Dans ce modèle, dont la définition est donnée dans l'introduction de la première partie, la variation de pression par accélération est égale à :

$$-\left(\frac{d\bar{p}}{dx_1}\right)_a = M^2 \qquad \frac{d}{dx_1}\left(\frac{1}{\rho_m}\right)$$

où $\frac{1}{\rho_m} = \frac{x^2}{<\alpha>\ \rho_g} + \frac{(1 - x)^2}{(1 - <\alpha>)\ \rho_L}$

On a donc :

$$-\left(\frac{d\bar{p}}{dx_1}\right)_a = M^2 \left\{ - \frac{x^2\ r\ T}{<\alpha>\ \bar{p}^2} + \frac{x^2\ r\ T}{\bar{p}} \frac{d}{d\bar{p}}\left[\frac{1}{<\alpha>}\right] + \frac{(1-x)^2}{\rho_L} \frac{d}{d\bar{p}}\left[\frac{1}{1-<\alpha>}\right] \right\} \frac{d\bar{p}}{dx_1}$$

Le taux de vide surfacique $<\alpha>$ sera pris sous la forme exprimée dans la relation (A V-2).

Nous avons alors (en négligeant la variation de V_∞ avec la pression) :

$$\frac{d}{d\bar{p}}\left[\frac{1}{<\alpha>}\right] = \left(Co + \frac{V_\infty}{U_L}\right) \frac{1}{x\ \rho_L\ r\ T}$$

$$= \frac{1}{\bar{p}}\left(\frac{1}{<\alpha>} - Co\right)$$

$$\frac{d}{d\bar{p}}\left[\frac{1}{1 - <\alpha>}\right] = - \left(Co + \frac{V_\infty}{U_L}\right) \frac{x}{\rho_L\ r\ T} \frac{1}{\left[\left(Co - 1\right) x + \left(Co + \frac{V_\infty}{U_L}\right) \frac{\bar{p}}{\rho_L r T}\right]^2}$$

On a donc :

$$-\left(\frac{d\bar{p}}{dx_1}\right)_a = M^2 \frac{d\bar{p}}{dx_1} \left\{ -\frac{Co\, x^2\, r\, T}{\bar{p}^2} - \frac{\left(Co + \frac{V\infty}{U_L}\right) x \frac{(1-x)^2}{\rho_L^2\, rT}}{\left| (Co-1)\, x + \left(Co + \frac{V\infty}{U_L}\right) \frac{\bar{p}}{\rho_L r\, T} \right|^2} \right\}$$

Il est possible d'évaluer, dans les hypothèses du chapitre 2, l'ordre de grandeur des différents termes qui interviennent dans cette relation.
On peut alors faire les approximations suivantes :

a) $x \ll 1$

b) $(Co-1)\, x \ll \left(Co + \frac{V\infty}{U_L}\right) \frac{\bar{p}}{\rho_L\, r\, T}$

En effet C_o est de l'ordre de 1
x est de l'ordre de 10^{-3}
$\bar{p}$ est supérieur ou égal à 10^5 Pa.

c) $Co\, x \ll \frac{1}{\left(Co + \frac{V\infty}{U_L}\right)}$

En effet $Co\, x$ est de l'ordre de 10^{-3} alors que

$\left(Co + \frac{V\infty}{U_L}\right)$ est de l'ordre de 1

La variation de pression par accélération peut donc se mettre sous la forme :

$$-\left(\frac{d\bar{p}}{dx_1}\right)_a = -M^2 \frac{x\, r\, T}{\left(Co + \frac{V\infty}{U_L}\right) \bar{p}^2} \frac{d\bar{p}}{dx_1} \qquad (A\ V - 4)$$

forme analogue à la forme (A V - 1)

3. - Modèle quelconque.

Nous pouvons toujours écrire que

$$-\left(\frac{d\bar{p}}{dx_1}\right)_a = M^2 \frac{d}{dx_1}\left(\frac{1}{\rho_m}\right)$$

où $\frac{1}{\rho_m} = K_1 \frac{x^2}{\langle\alpha\rangle \rho g} + K_2 \frac{(1 - x)^2}{(1 - \langle\alpha\rangle) \rho_L}$

Les coefficients K_1 et K_2 étant des coefficients de corrélations qui restent toujours de l'ordre de grandeur de l'unité.

Un calcul analogue au précédent montre alors que

$$- \left(\frac{d\bar{p}}{dx_1} \right)_a \simeq - M_L^2 \frac{K_2 \, x \, r \, T}{\left(Co + \frac{V_\infty}{U_L} \right) \bar{p}^2} \frac{d\bar{p}}{dx_1} \qquad (A\ V - 5)$$

Cette forme est analogue à la forme (A V - 1) déterminée dans le chapitre 2. La valeur du coefficient K_2 peut alors s'exprimer par :

$$K_2 = \left(Co + \frac{V_\infty}{U_L} \right) \left(1 + b \frac{f}{2} A_o^2 \right)$$

4. - Conclusion.

Nous avons montré que l'expression (A V - 1) déterminée dans le chapitre 2 était comparable aux expressions habituellement citées dans la littérature.

BIBLIOGRAPHIE

[1] G. W. GOVIER, B. A. RADFORD et J. S. C. DUNN : The upwards vertical flow of air-water mixtures : 1, Effect of air and water rates on flow pattern, hold-up and pressure drop, Can. J. Chem. Eng., 35, 58 (1975).

[2] M. G. HUBBARD et A. E. DUKLER : Proc. of the 1966 heat transfer and fluid mechanics institute. Stanford University Press (1966).

[3] C. LACKME : Structure et cinématique des écoulements diphasiques à bulles. Rapport CEA R-3203, 1967.

[4] G. E. ALVES : Co-current Liquid-gas flow in a pipeline contactor. Chem. Process. Engng., 50, 449 (1954)

[5] G. E. SMISSAERT : Two-component, two-phase flow parameters for low circulation rates - ANL-6755 (1964)

[6] J. G. COLLIER : Convective boiling and condensation Mc Graw Hill Book Company (1972).

[7] G. F. HEWITT et N. S. HALL TAYLOR : Annular two-phase flow Pergamon Press (1970)

[8] J. BOURE et M. REOCREUX : General equations of two phase flow Applications to critical flows and to non steady flows. From Fourth All Union Heat and Mass Transfer Conference-Minsk (1972).

[9] M. REOCREUX Contribution à l'étude des débits critiques en écoulement diphasique eau-vapeur - Thèse (1974).

[10] J. HADAMARD, C. R. 152, 1735 (1911).

[11] V. G. LEVICH : Physico - Chemical hydrodynamics Prentice Hall Englewood Cliffs, H. J. (1962)

[12] S. L. S00 : Fluid dynamics of multiphase systems Blaisdell publishing company (1967).

[13] R. ERLICH and J.C. SLATTERY : Approximate solutions for two-phase flow problems. Ind. Eng. Chem. Fundam. Vol 10, n°3, p 466 (1971).

[14] A. EINSTEIN, Annln. Phys. 19, 289-306 (1906). Corrections : Annln Phys 34, 591 - 592 (1911).

[15] W. VAND : Viscosity of solutions and suspensions J. Phys. Colloïd Chem., 1948, 52, 277.

[16] R.G. COX and H. BRENNER : The rheology of a suspension of particules in a Newtonian fluid. Chem. Eng. Sci. 26, 65 (1971).

[17] R.W. LOCKHART and R.C. MARTINELLI Proposed correlation of data for isothermal two-phase two-component flow in a pipe, Chem. Eng. Prog. 45, 39 (1949).

[18] A.A. ARMAND. The resistance during the movement of a two-phase system in horizontal pipes, Izvest. Vesesoy. Teplotekh. Inst. 1, 16-23 (1946), AERE Trans. 826.

[19] C.J. BAROCZY. A systematic correlation for two-phase pressure drop. Chem. Eng. Progr. Symp. Series, 62, n°64, p 232 (1965)

[20] G.A. HUGHMARK. Hold-up in gas liquid flow Chem. Eng. Prog. 58, 4, 62-65 (1962).

[21] G. KASTURI and J.B. STEPANEK : Two phase flow - II Parameters for void fraction and pressure drop correlations. Chem. Eng. Sci, 27 p 1871-1891 (1972).

[22] A.E. DUKLER, M. WICKS and R.G. CLEVELAND, Pressure drop and hold-up in two-phase flow : Part A, A Comparison of existing correlations ; Part B, An approach through similarity analysis, A.I. Ch. E.J. 10, 38 (1964)

[23] A. CICCHITTI, C. LOMBARDI, M. SILVESTRI, G. SOLDAINI, and R. ZAVATARELLI :Two phase cooling experiments - pressure drop, heat transfer and burnout experiments, Energia Nucleare 7, 407-425 (1960).

[24] W.H. Mc ADAMS, et al : Vaporisation inside horizontal tubes II Benzene-oil mixtures, Trans. ASME, vol 64, p 193 (1942).

[25] R.F. TANGREN, C.H. DODGE and H.S. SEIFFERT :Compressibility effects in two-phase flow : J. of Applied physics, 20, 7, 637 (1949).

[26] S. CALVERT and B. WILLIAMS "Upward cocurrent annular flow of air and water in smooth tubes" AI Ch E.J. 1, 78 (1955).

[27] S. LEVY : Steam slip - Theoretical prediction from momentum model J. of heat Transfer 82, 113 (1960)

[28] S. LEVY : Prediction of two phase critical flow rate J. of heat transfer, 87, 83 (1965).

[29] J.E. CRUVER and R.W. MOULTON : Critical flow of liquid - vapour mixtures AIChEJ. 13,52 (1967).

[30] F.J. MOODY : Maximum flow rate of a single component, two phase mixture J. of heat transfer 87, 134 (1965).

[31] H.K. FAUSKE : Propagation of pressure disturbances in two-phase flow. Symp. on two-phase flow dynamics - Eindhoven vol. 1, 639 (1967).

[32] A. CRESPO : Sound and shock waves in liquids containing bubbles. The physics of fluids vol 12, N°11, p 2274 (1969).

[33] N. ZUBER and J. FINDLAY : Average volumetric concentration in two phase flow systems. J. of heat transfer 87, 453 (1965).

[34] S.G. BANKOFF : A variable density single fluid model of two phase flow with particular référence to steam-water flow. J. of heat transfer 82 (1960).

[35] S. LEVY · Prediction of two-phase pressure drop and density distribution from mixing length theory. J. of heat transfer p 137 (1963).

[36] F.C. BROWN and W.L. KRANICH · A model for the prediction of velocity and void fraction in two-phase flow AIChE.J. p 750 (1968).

[37] D.R.H. BEATTIE : Two phase flow structure and mixing length theory Nucl. Eng. and Design, 21, 46-64 (1972).

[38] E.R. VAN DRIEST : On turbulent flow near a wall. Heat transfer and fluid mechanics institute (1955).

[39] S.I. PAI : On turbulent jet mixing of two gases at constant temperature. J. of appl. mech. vol. 22 (1955).

[40] F.A. SCHRAUB : Isokinetic probe and other two phase sampling devices : a survey : in Two phase flow Instrumentation 1 1 th national ASME/AICHE heat transfer conference. Aug. 3-6 (1969) Minneapolis (Minn.).

[41] C.A. PRINS. : Momentum flux in two phase flow - J. of heat transfer. 91, 454 (1969).

[42] C.G. TELETOV : Hydrodynamique des mélanges diphasiques. 1 Equations hydrodynamiques et de l'énergie. Vestnik de l'Université de Moscou 1958 n°2, Trad française : J.M. DELHAYE dans : Rapport CEA - R - 3429 (2).

[43] G. STANDART : The mass, momentum and energy equations for heterogeneous flow systems. Chem. Eng. Sci, 19, p 227-236 (1964)

[44] H. WUNDT : On the structure of consistent equation sets to describe multiphase flow. Symp. on two-phase flow dynamics tome 1, p 769 Eindhoven (1967).

[45] J.M. DELHAYE : Contribution à l'étude des écoulements diphasiques eau-air et eau-vapeur. Thèse (1970).

[46] J.M. DELHAYE : Equations fondamentales des écoulements diphasiques - 1ère partie : équations générales de conservation - 2ème partie : compléments et remarques. Rapport CEA-R-3429.

[47] P. VERNIER et J.M. DELHAYE : Général two-phase flow equations applied to the thermohydrodynamics of boiling nuclear reactors. Energie Primaire 4, 1-2, 3 (1968).

[48] D.A. DREW : Averaged field equations for two-phase media. Studies in appl. Math. 50, 2, 133 (1971).

[49] S. WHITAKER : The transport equations for multi-phase systems Chem. Eng. Sci, 28, 139 (1973).

[50] G. ARNAULT : Communication privée - Orsay (1971).

[51] P. ADLER : C.R. A.S. t 274 p 120-122 série A (1972).

[52] A. FORTIER : Mécanique des Fluides et Transferts de chaleur et de masse par convection - Masson (1975).

[53] B.A. KADER and A.M. YAGLOM : Heat and Mass transfer laws for fully turbulent wall flows. Int. J. Heat. and Mass Transfer - vol 15 pp 2329 - 2351 (1972).

[54] L. SCHWARTZ : Méthodes mathématiques pour les sciences physiques Hermann (1965).

[55] R. PETIT : Diffraction d'une onde plane par un réseau métallique Rev. d'opt. instrum. et théorique t 45, 249, 353 (1966).

[56] J.M. DELHAYE. Général équations of two phase systems and their applications to air-water bubble flow and to steam-water flashing flow - ASME - AIChE heat transfer Conference, Minneapolis, Minn. (1969).

[57] F. RODDIER Distributions et Transformation de Fourier. Ediscience (1971).

[58] A. PAPOULIS Probability, Random variables and Stochastic processes Mac Graw Hill Book Company (1965).

[59] J. LEWI : Expression des termes de transfert aux interfaces dans un écoulement diphasique gaz liquide à petites bulles. Rapport CEA SEEN/RT/73044 (1973).

[60] H. LECROART et R. PORTE : "Electrical probes for study of two-phase flow at high velocity" Int. Symp. on two phase systems Haffa (1971).

[61] A. FORTIER Mécanique des suspensions Masson et Cie (1967)

[62] P. ADLER : Théorie asymptotique des écoulements turbulents établis à bulles. C R A S t 274 p 1255-1257 et p 1575-1577 série A (1972).

[63] L. CRAVAROLO, A. GIORGINI, A. HASSID, E. PEDROCCHI : A device for the measurement of shear stress on the wall of a conduit. CISE - report R-82 (1964).

[64] O. BAKER : Simultaneous flow of oil and gas. Oil Gas Il 53, 185. (1954).

[65] G. B. WALLIS One-dimensional two phase flow - Mc Graw Hill Book Company (1969).

[66] T.Z. HARMATHY : Velocity of large drops and bubbles in media of infinite or restricted extent AIChE J. 6, 2, 281. (1960).

[67] F.N. PEE BLES and H.J. GARBER : Studies of motion of gas bubbles in liquids Chem. Engr. Progress. 49,88 (1953).

[68] J.P. JACQUEMIN et J.F. LAPRAY - Essais de pompage triphasique par air-lift à 215 m de profondeur - Rapport SEEN/RT/74050 (1974)(CEA)

[69] D.J. NICKLIN, J.O. WILKES and J.F. DAVIDSON : Two-phase flow in vertical tubes. Trans. Inst. of Chem. Engrs, 49, 61 (1962).

[70] P. GRIFFITH and G.B. WALLIS : Two-phase slug flow J. of heat transfer 83, 397 (1961).

[71] Two-phase flow instrumentation - 11 th national ASME/AIChE heat transfer conference - Minneapolis (Minn.) Aug. 3-6 (1969).

[72] G.F. HEWITT : The role of experiments in two-phase, systems with particular reference to measurement techniques in : Progress in heat and mass transfer vol 6, ed. by G. HETSRONI, S. SIDEMAN, J.P. HARNETT, Pergamon (1972).

[73] J.M. DELHAYE, J.P. GALAUP, M. REOCREUX, R. RICQUE. Metrologie des écoulements diphasiques - Rapport CEA-R-4457 (1973).

[74] P. ADLER : Etude de la formation d'une émulsion air et eau. 45e colloque Euromech - Palerme (1973).

[75] J. LEWI · Interprétation statistique des résultats délivrés par la sonde à variation d'impédance - Rapport SEEN/ST/72 006 (1972).(CEA)

[76] H. LECROART et J. LEWI : Mesures locales et leur interprétation statistique pour un écoulement diphasique à grande vitesse et taux de vide élevé (XII° journées de l'hydraulique - Paris (1972).

[77] J. LEWI : Structure locale d'un écoulement gaz-liquide à bulles - 45° colloque Euromech - Palerme (1973).

[78] S. LOWENTHAL et Y. BELVAUX : Progrès récents en optique cohérentes : filtrage des fréquences spatiales, holographie Rev. d'opt. th. et instrum. 46, 1, (1967).

[79] J.C. VIENOT, P. SMIGIELSKI, H. ROYER : Holographie optique - Développements - Applications - Dunod (1971).

[80] P. SMIGIELSKI : Application de l'holographie à la visualisation d'objets en mouvement ultra-rapide - Rapport ISL-41/71.

[81] H. ROYER, F. ALBE : Visualisation de brouillards par holographie (1ère partie) - Rapport ISL-RT 14/71.

[82] H. ROYER, F. ALBE : Visualisation et mesure des brouillards givrants par holographie - Rapport ISL-RT 1/72.

[83] H. SCHLICHTING : Boundary-Layer Theory. Mc Graw Hill Company (1968)

[84] S.S. KUTATELADZE : Problèmes d'écoulements turbulents des mélanges diphasiques - Acad. des Sci. de l'U.R.S.S. Section Sibérienne - Institut de thermophysique - Novosibirsk (1973).

FIGURES

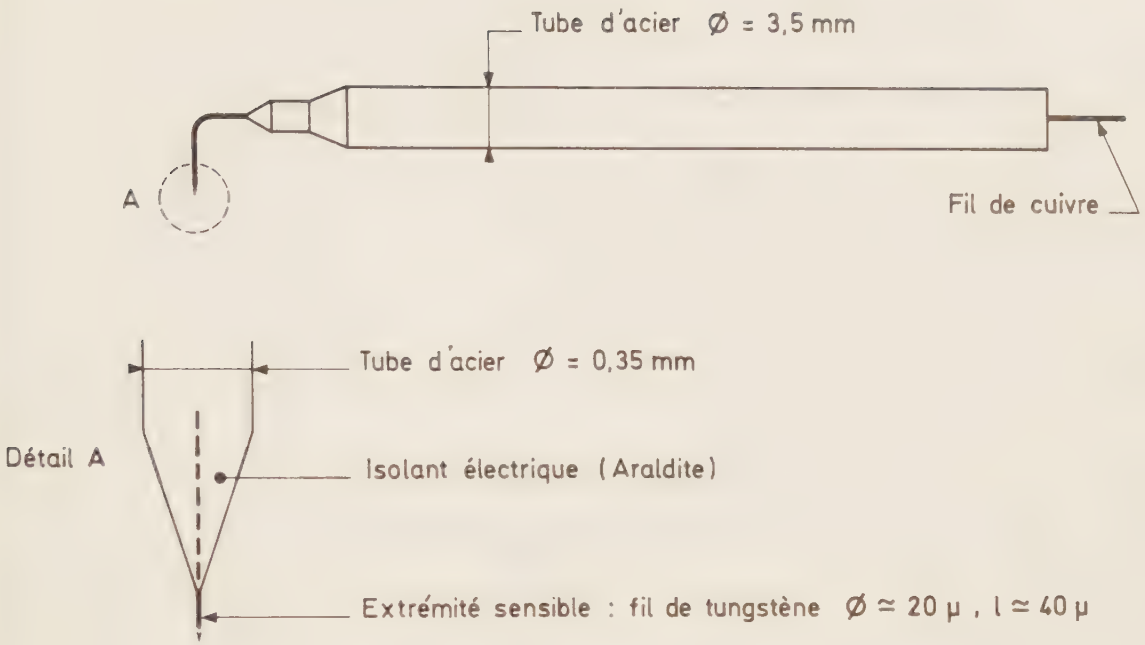


Fig. 4.1 _ Schéma de la sonde à variation d'impédance

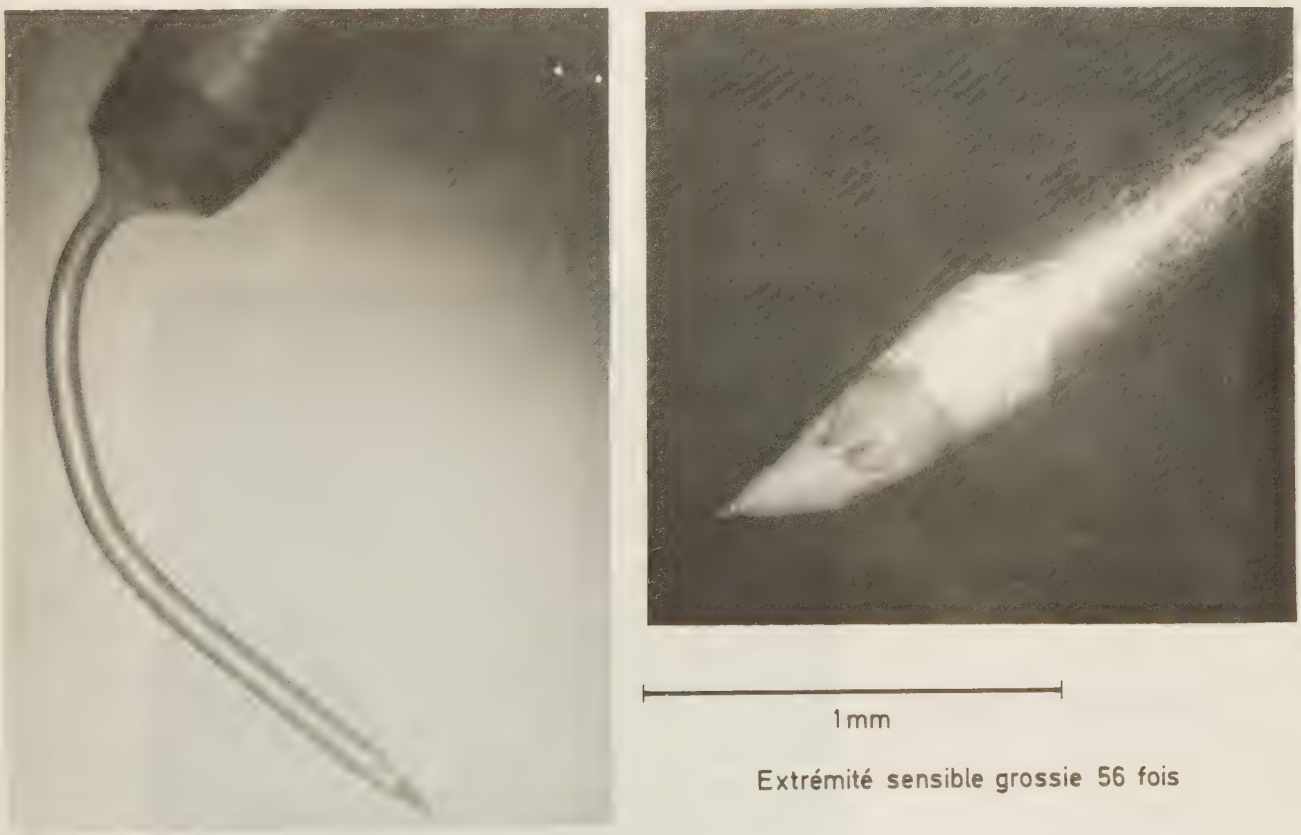
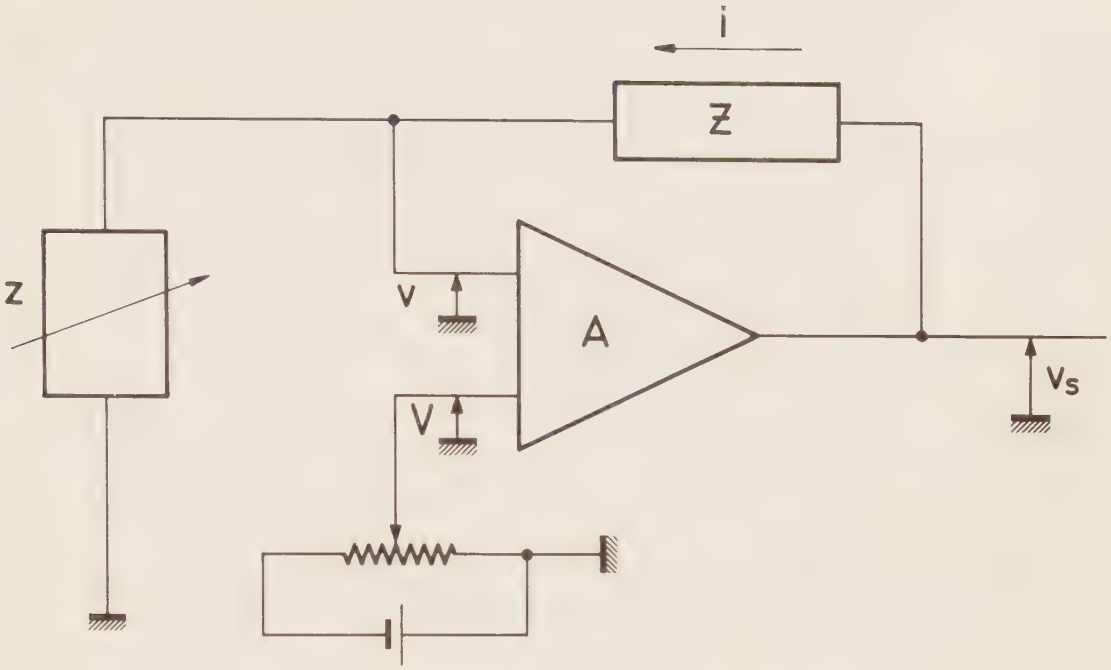


Fig. 4.2 _ Photographies de la sonde à variation d'impédance



A : Amplificateur différentiel de gain en tension G

V : Tension de consigne v : Tension de la sonde

$v_s = G (V - v)$: tension de sortie

$\mathcal{Z}$: Impédance fixe z : Impédance de la sonde

$$G \gg \frac{z}{\mathcal{Z} + z} \qquad v_s \sim V \left(1 - \frac{\mathcal{Z}}{z} \right)$$

Fig. 4 . 3 _ Diagramme du circuit de détection

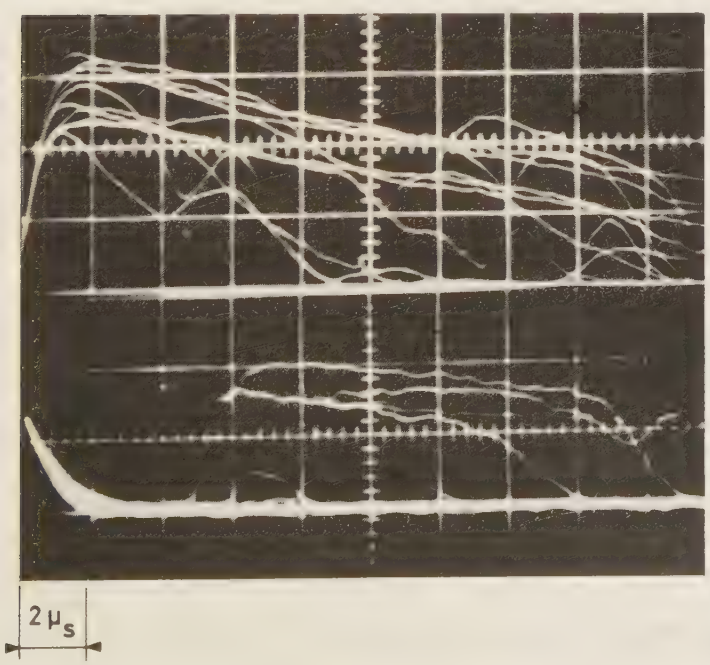


Fig. 4 . 4 _ Signaux émis par la sonde

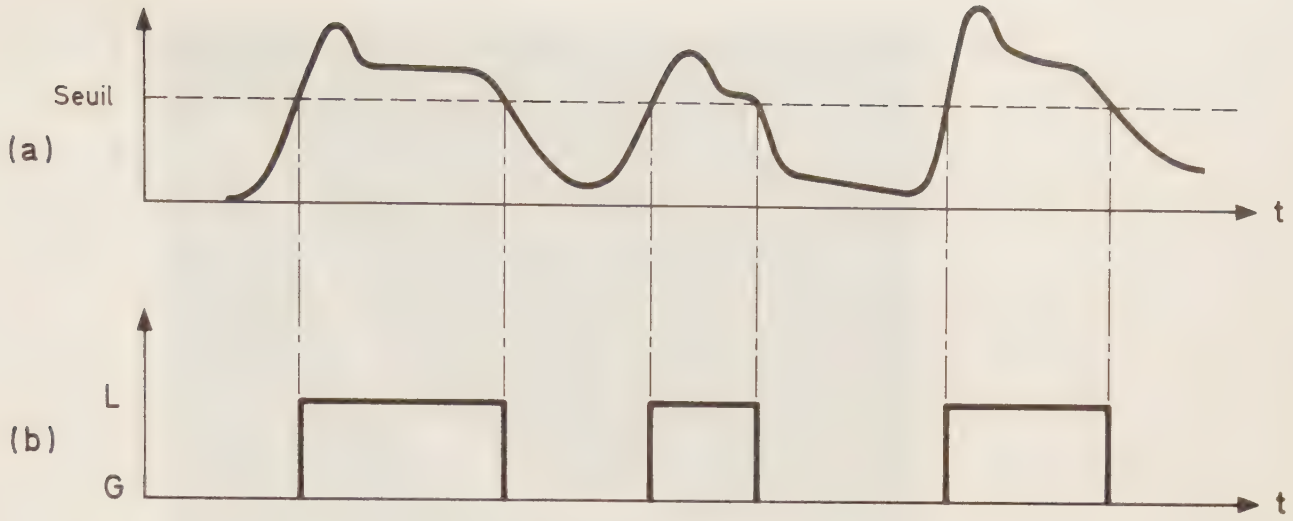


Fig. 4.5 _ Signaux réels (a) et idéaux (b)

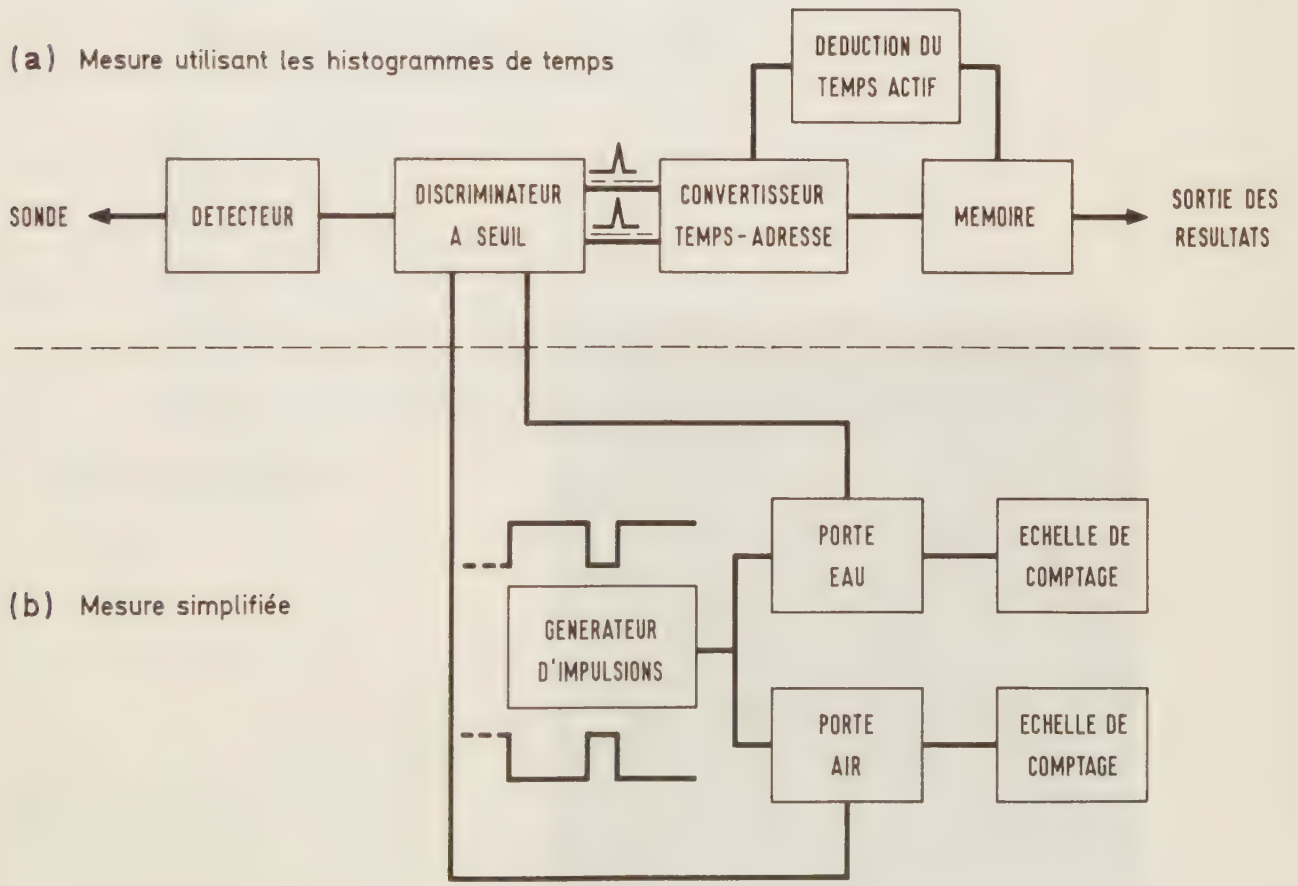


Fig. 4.6 _ Diagramme de la mesure du taux de vide

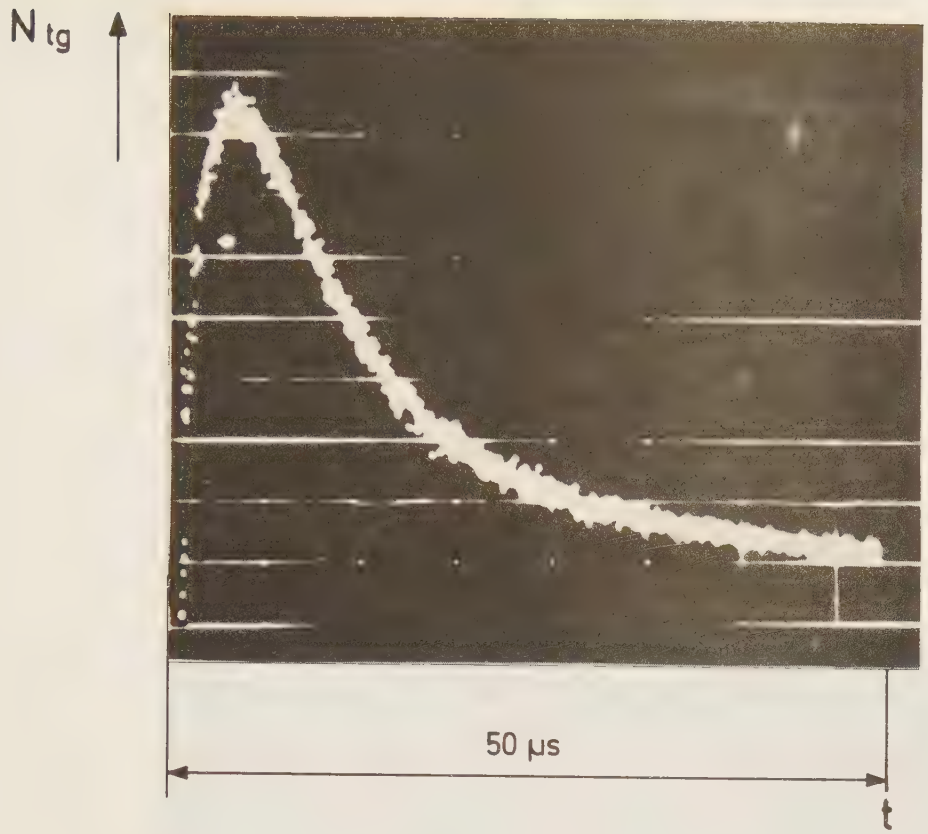


Fig. 4 . 7 _ Histogramme du temps de passage du gaz

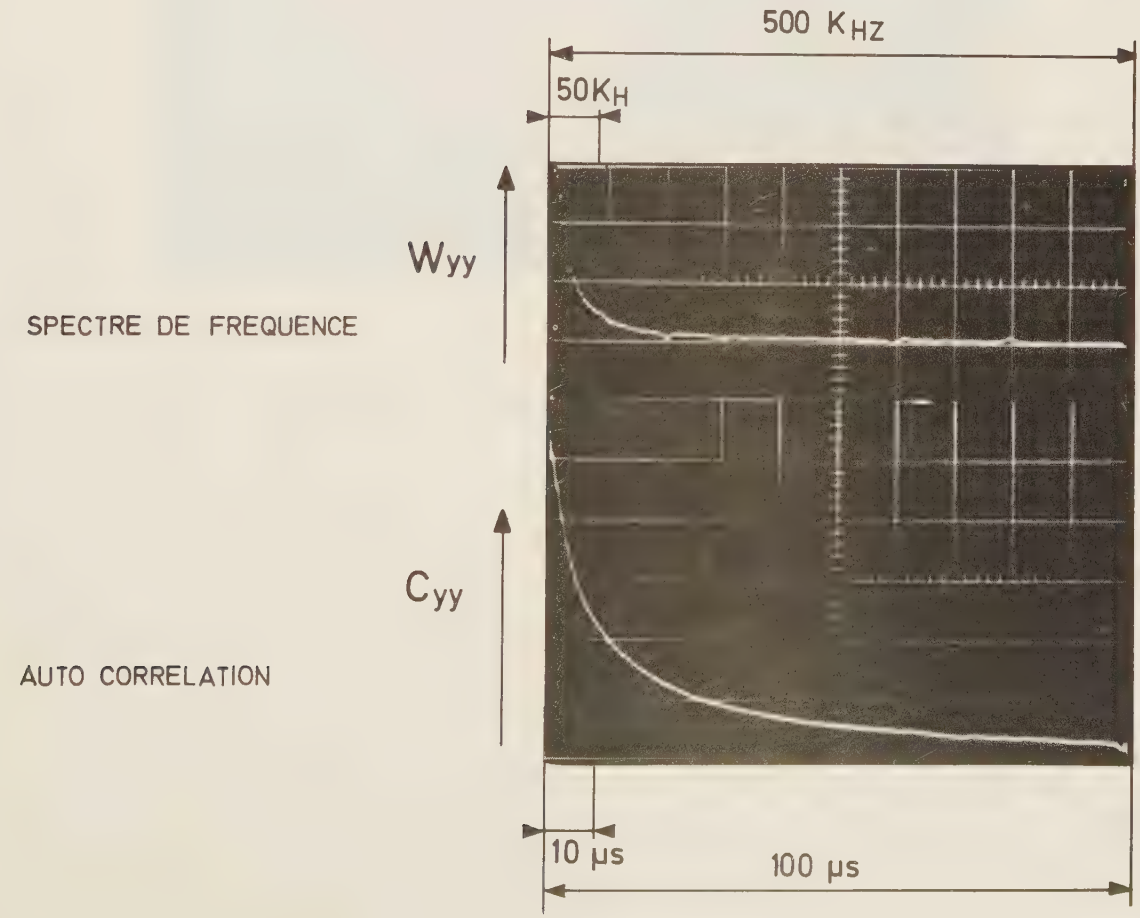
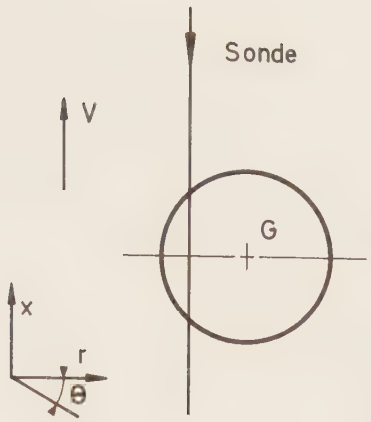


Fig. 4 . 8 _ Autocorrélation et spectre de fréquence

Fig. 4 . 9 _ Photographie de la bisonde

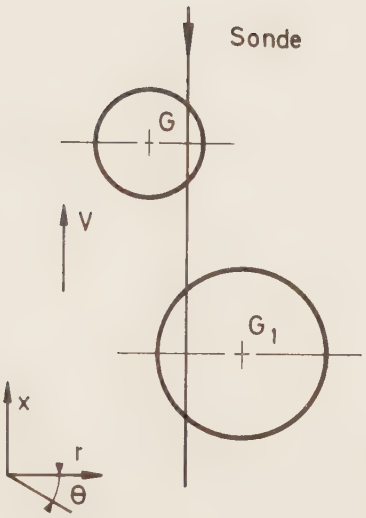


Axe de la sonde r = 0

G (r , θ , x)

Diamètre D

a)



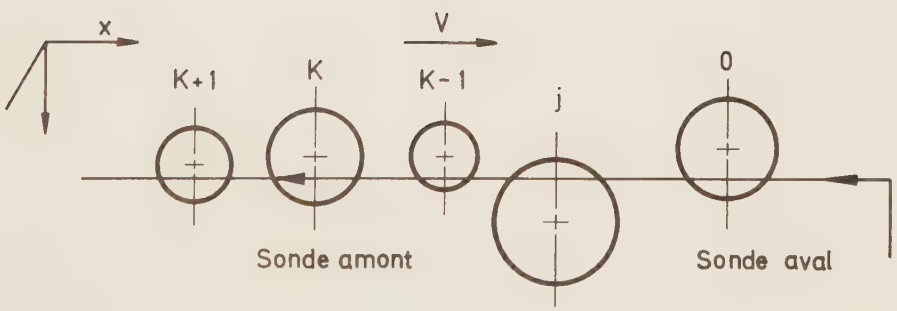
G_2 (r_2 , θ_2 , x_2)

Diamètre D_2

G_1 (r_1 , θ_1 , x_1)

Diamètre D_1

b)



c)

Fig. 4 . 10 _ Interprétation statistique des résultats donnés par la sonde à variation d'impédance

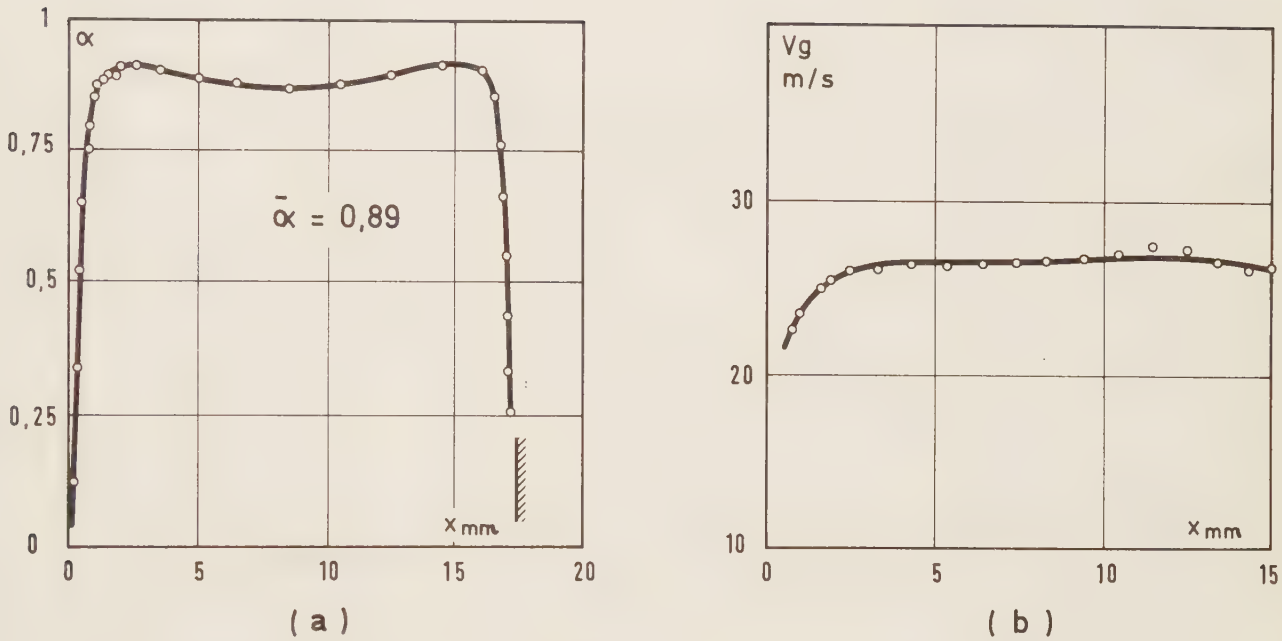


Fig. 4 . 11 _ Profils de taux de vide (a) et de vitesse d'interface (b)

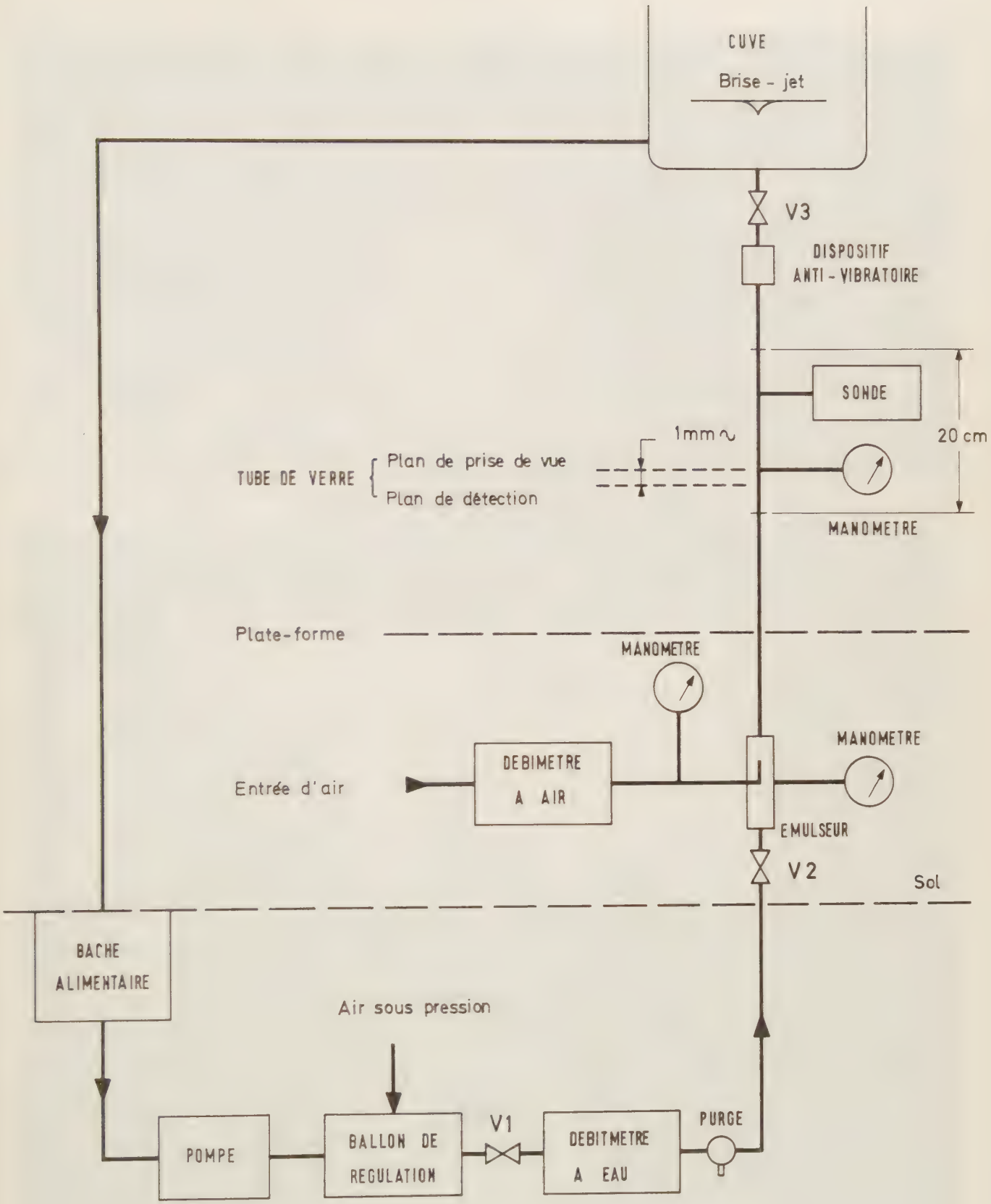


Fig. 5.1 _ Schéma d'ensemble de la boucle I.B.S

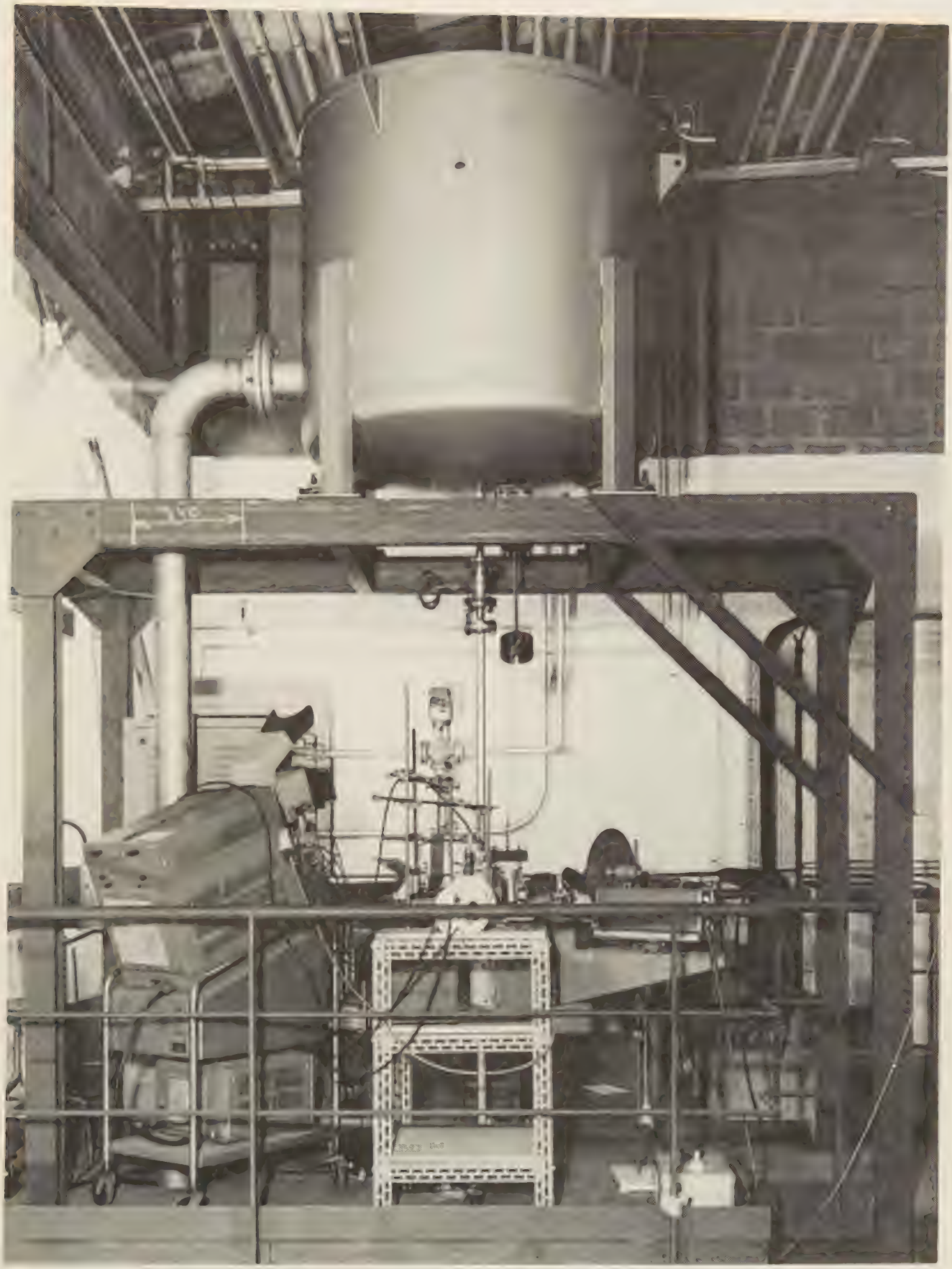


Fig. 5 . 2 _ Boucle " I . B . S " :

Plate - forme d ' expérimentation et cuve de sortie

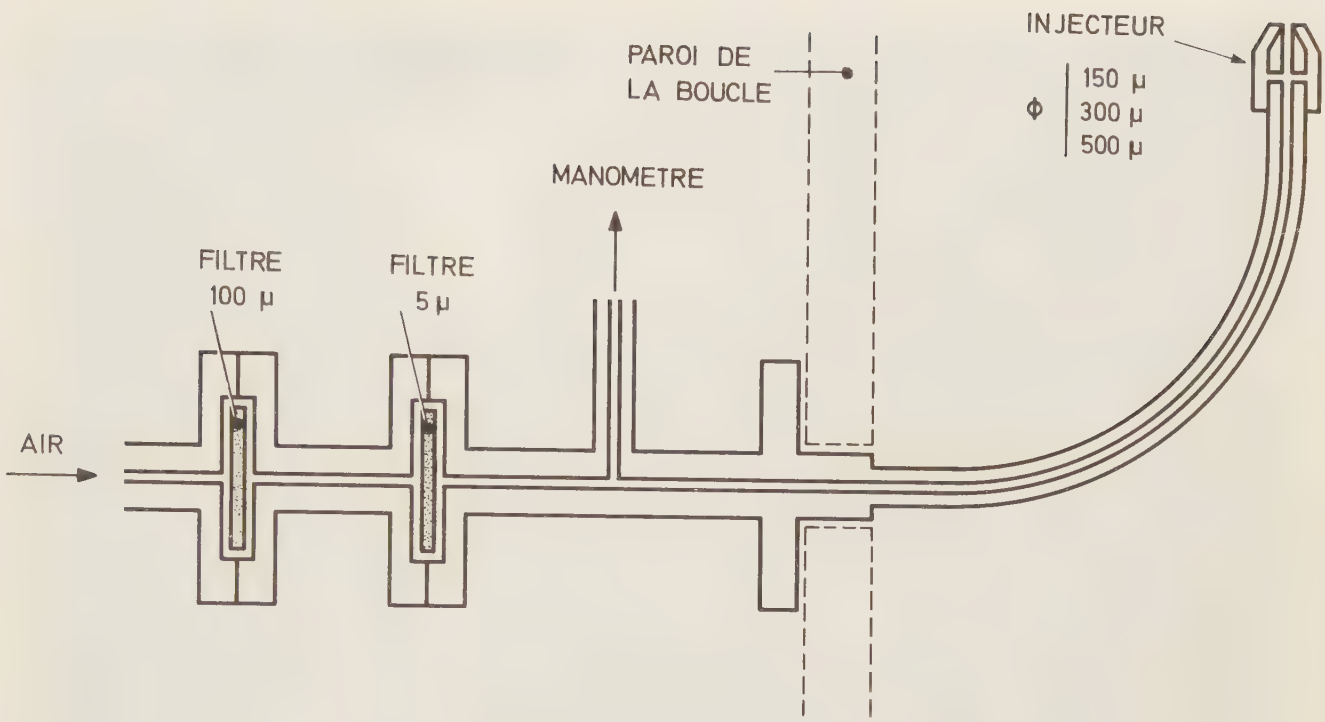


Fig. 5 . 3 _ Schéma de l'injecteur d'air

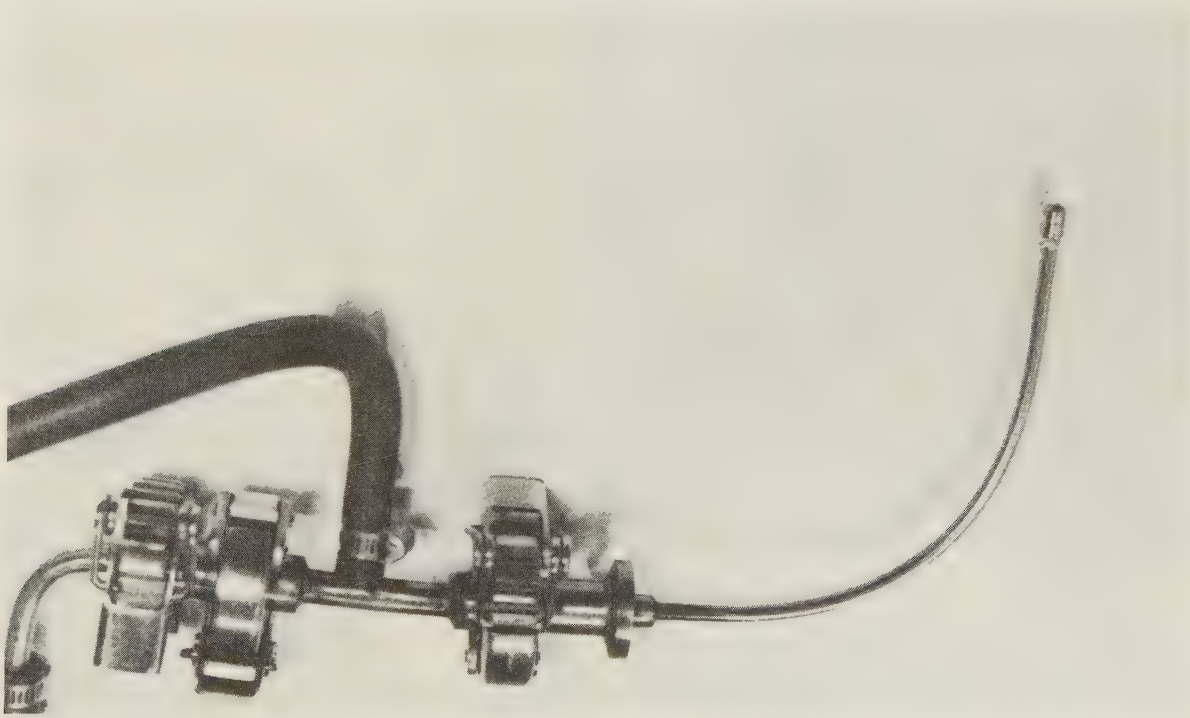


Fig. 5 . 4 _ Photo de l'injecteur d'air

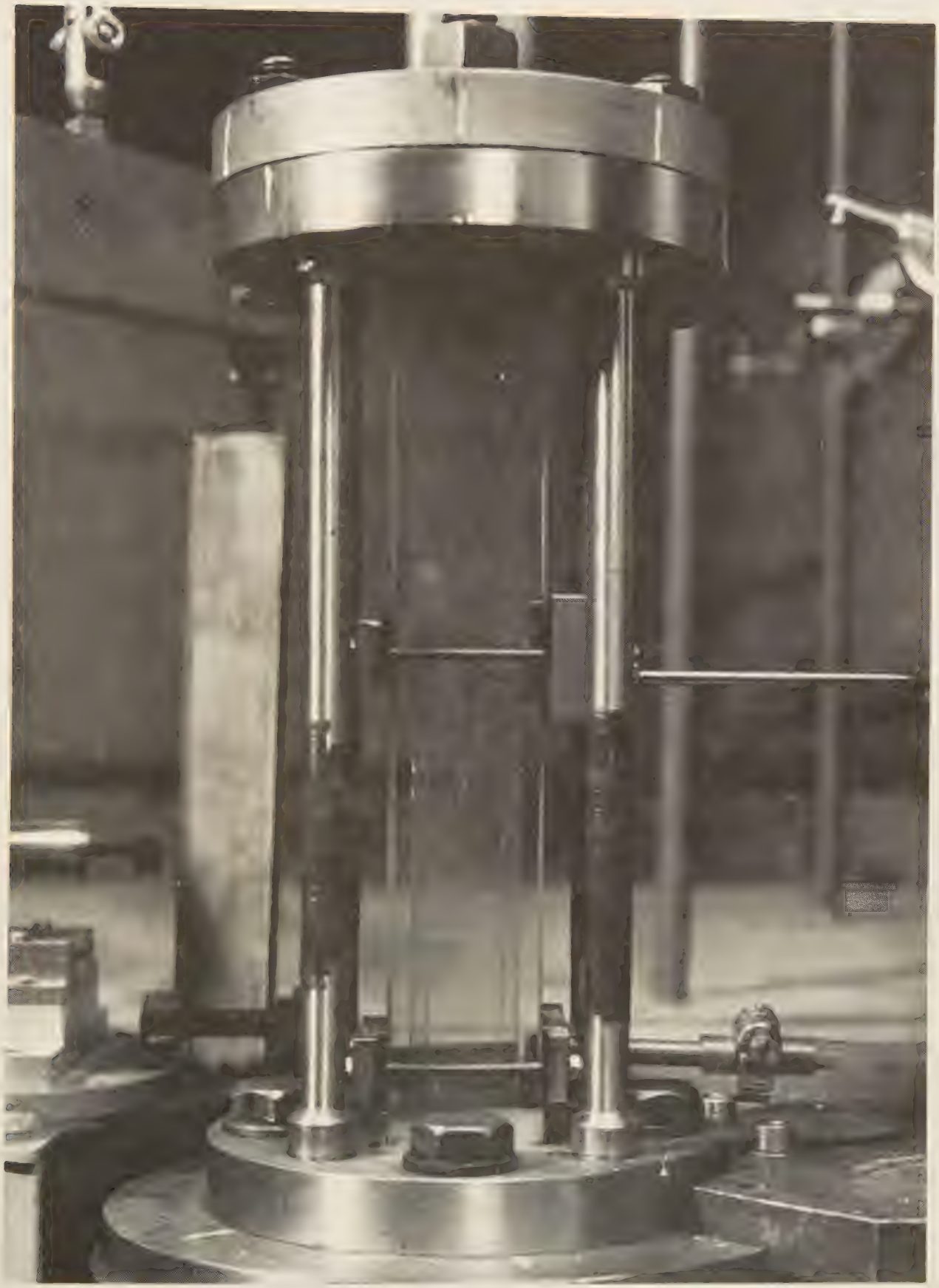


Fig. 5 - 5 - Canal de visualisation en verre

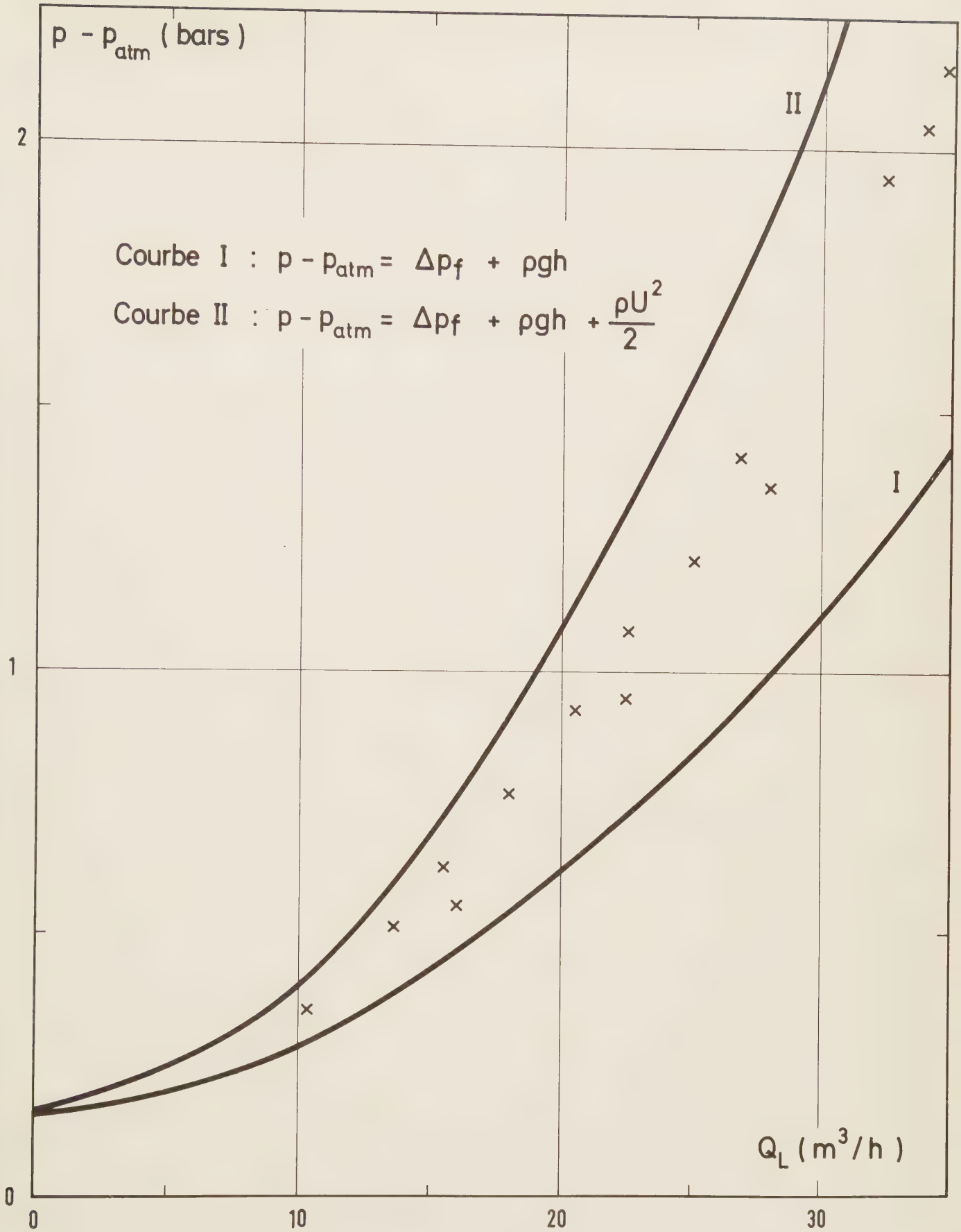


Fig. 5 . 6 _ Pression exercée sur le tube de verre pour diverses valeurs du débit liquide (liquide seul)

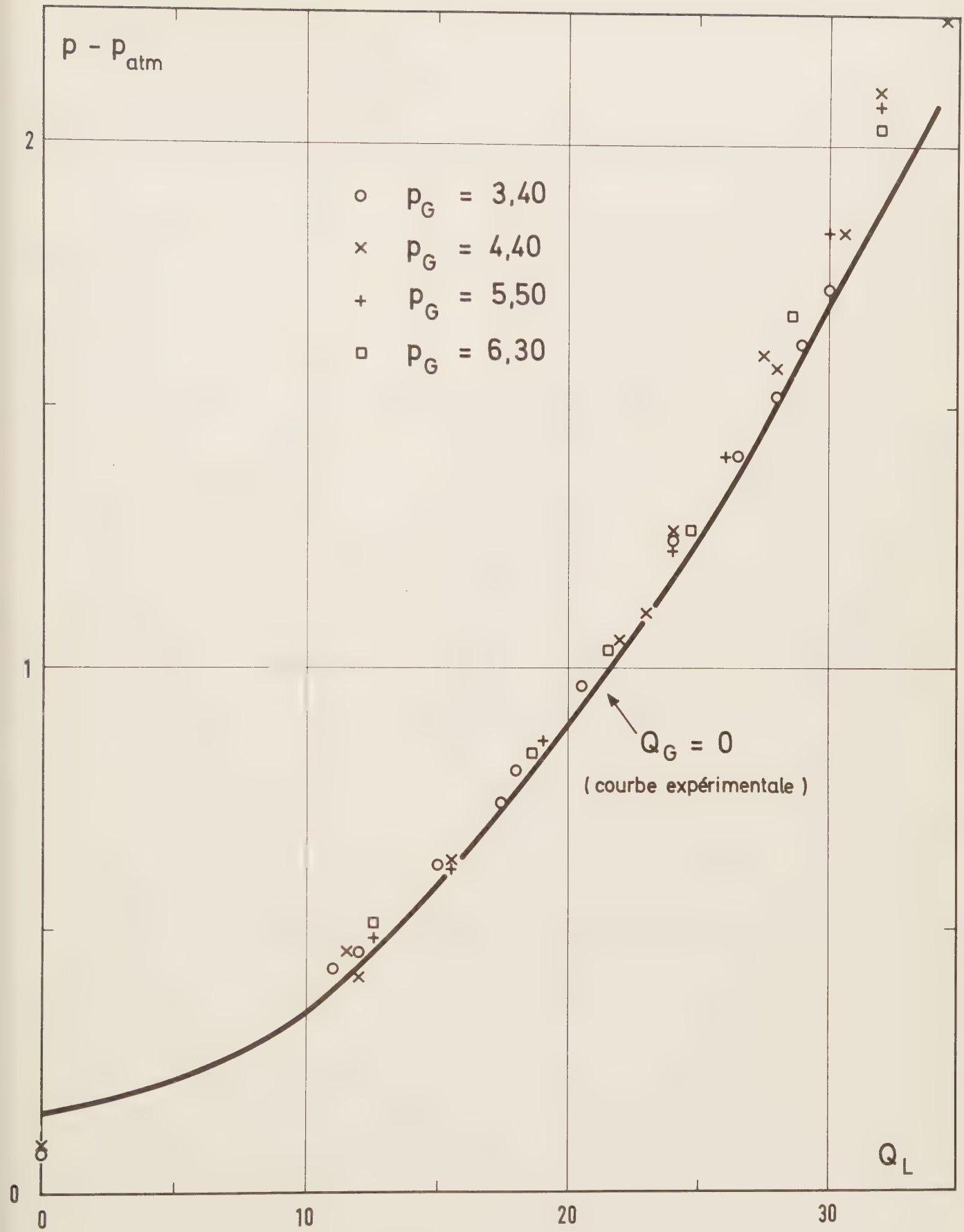


Fig. 5 . 7 _ Pression exercée sur le tube de verre pour diverses valeurs des débits liquides et gazeux

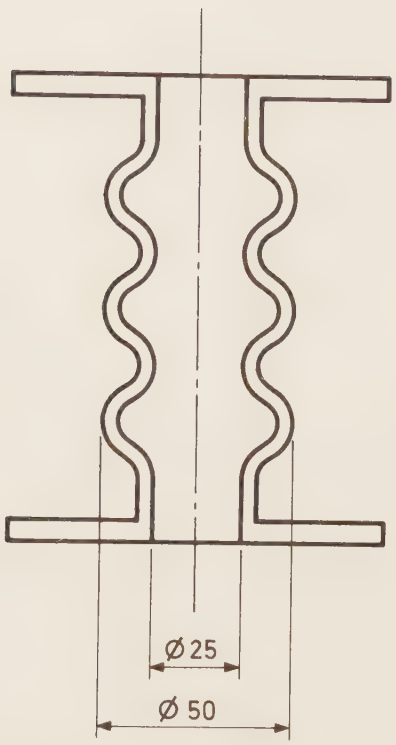


Fig. 5.8 _ Schéma de l'accouplement "Vibrofix"

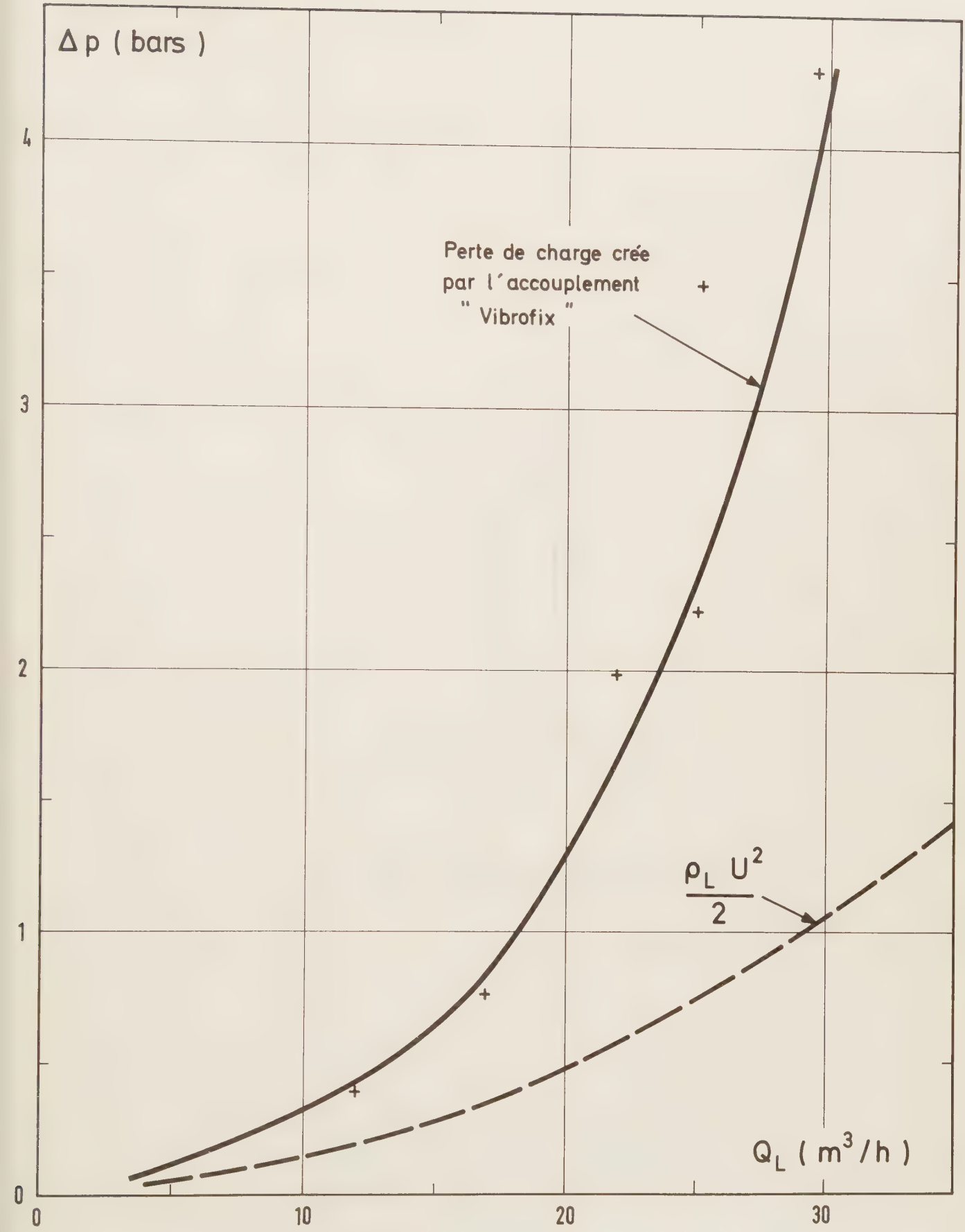


Fig. 5 . 9 _ Pertes de pression crées par l'accouplement " Vibrofix " en fonction du débit liquide

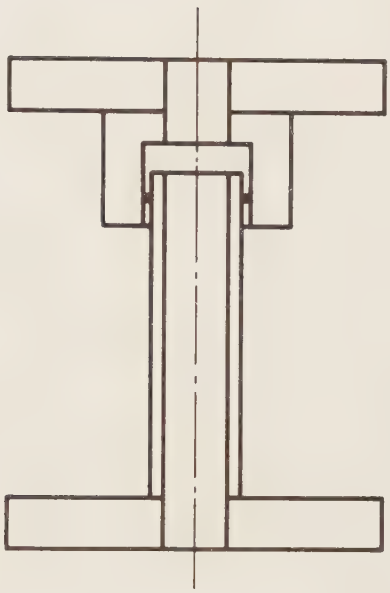


Fig. 5.10 _ Système antivibratoire utilisé

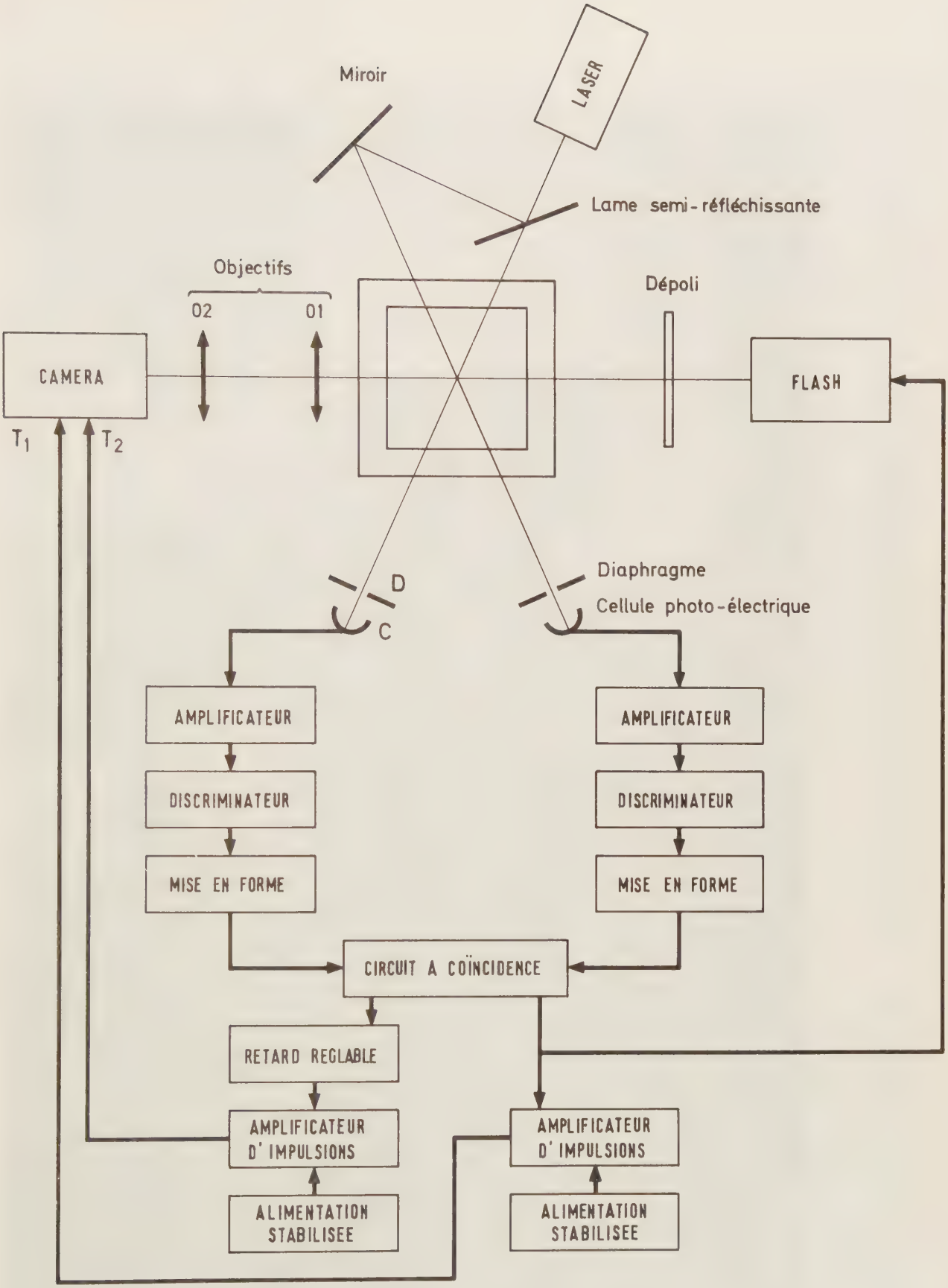


Fig. 5 . 11 _ Diagramme du dispositif de détection des bulles et de la prise de vue

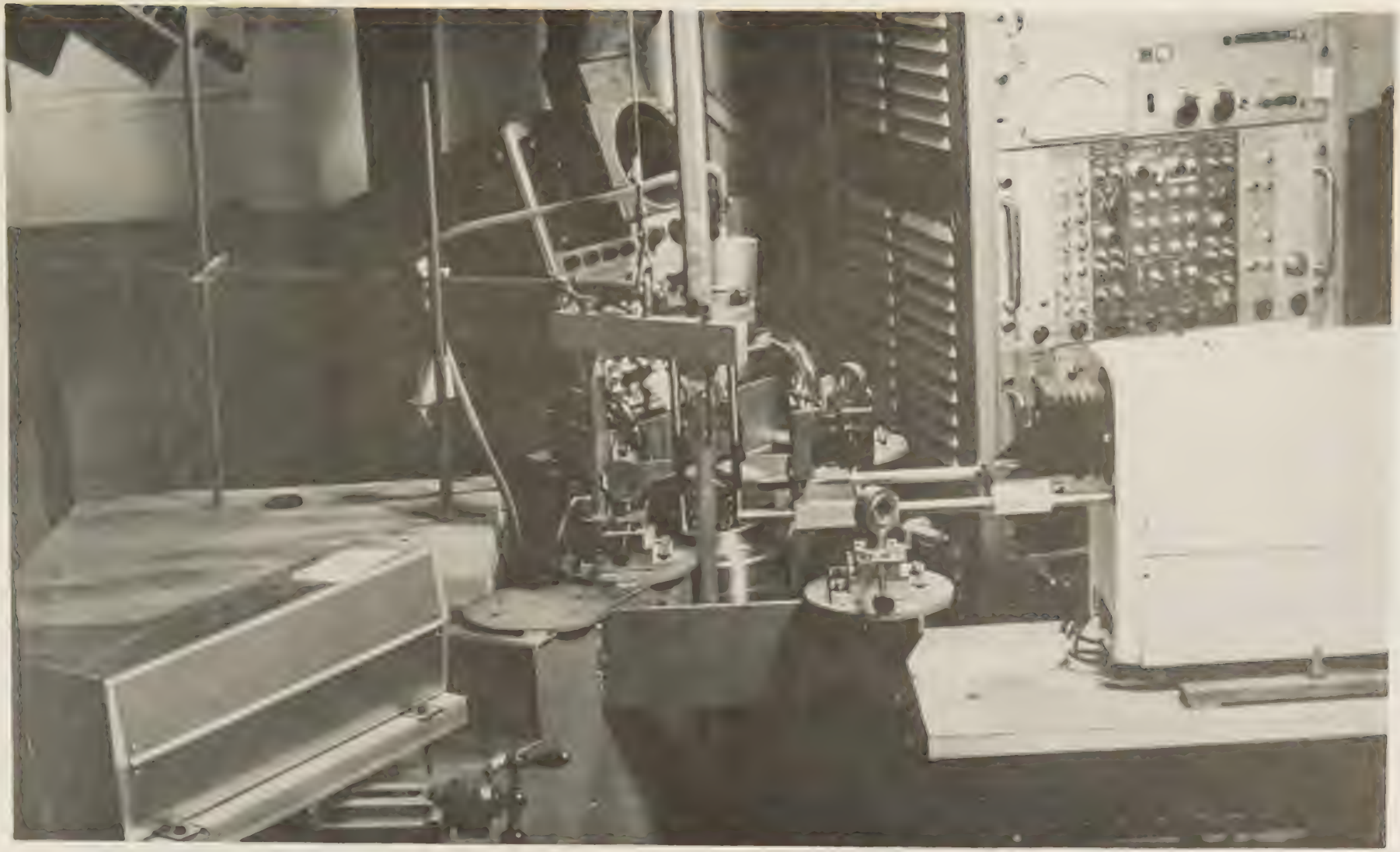


Fig. 5 . 12 _ Vue d'ensemble du dispositif de visualisation

Fig. 5 . 13 _ Dispositif optique de détection des bulles

Fig. 5 . 14 _ Baie électronique

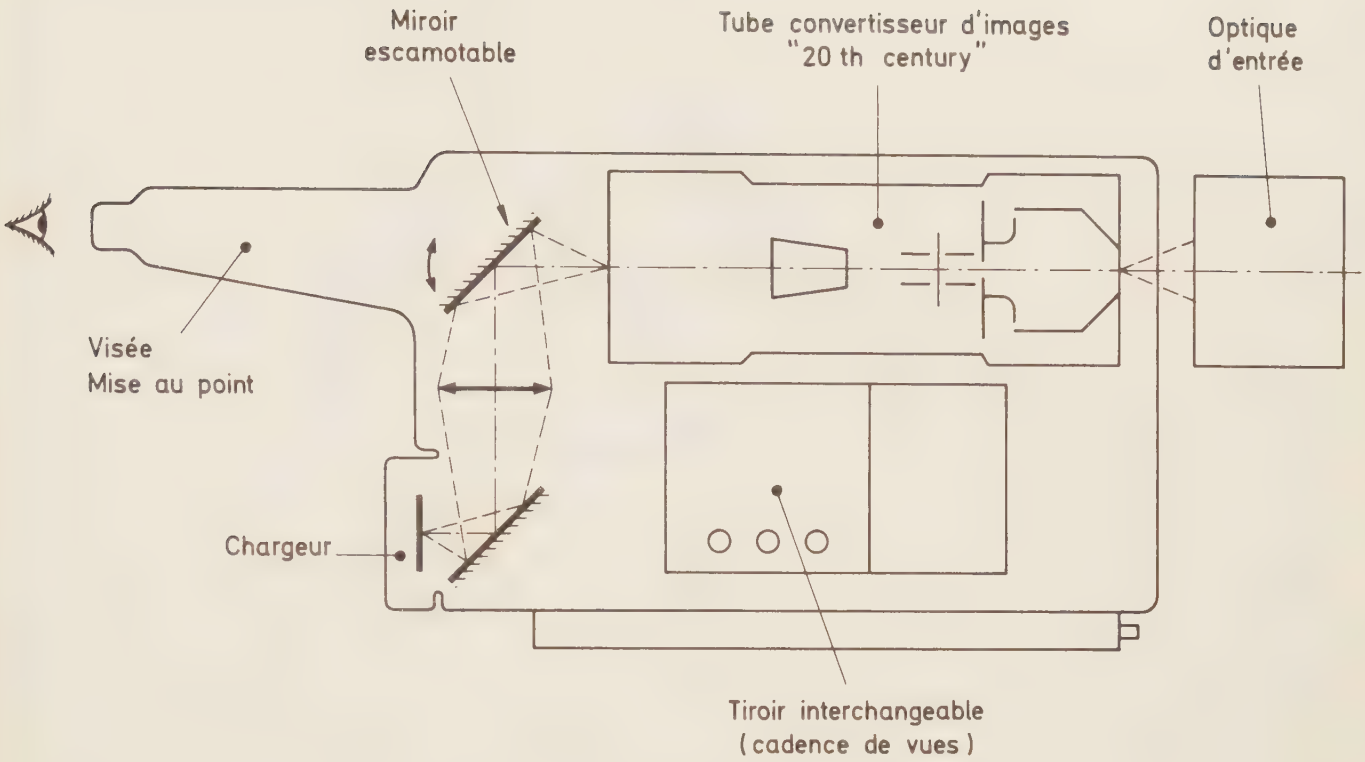


Fig. 5.15 _ Schéma de la caméra ultra-rapide (Echelle ≃ 1/5)

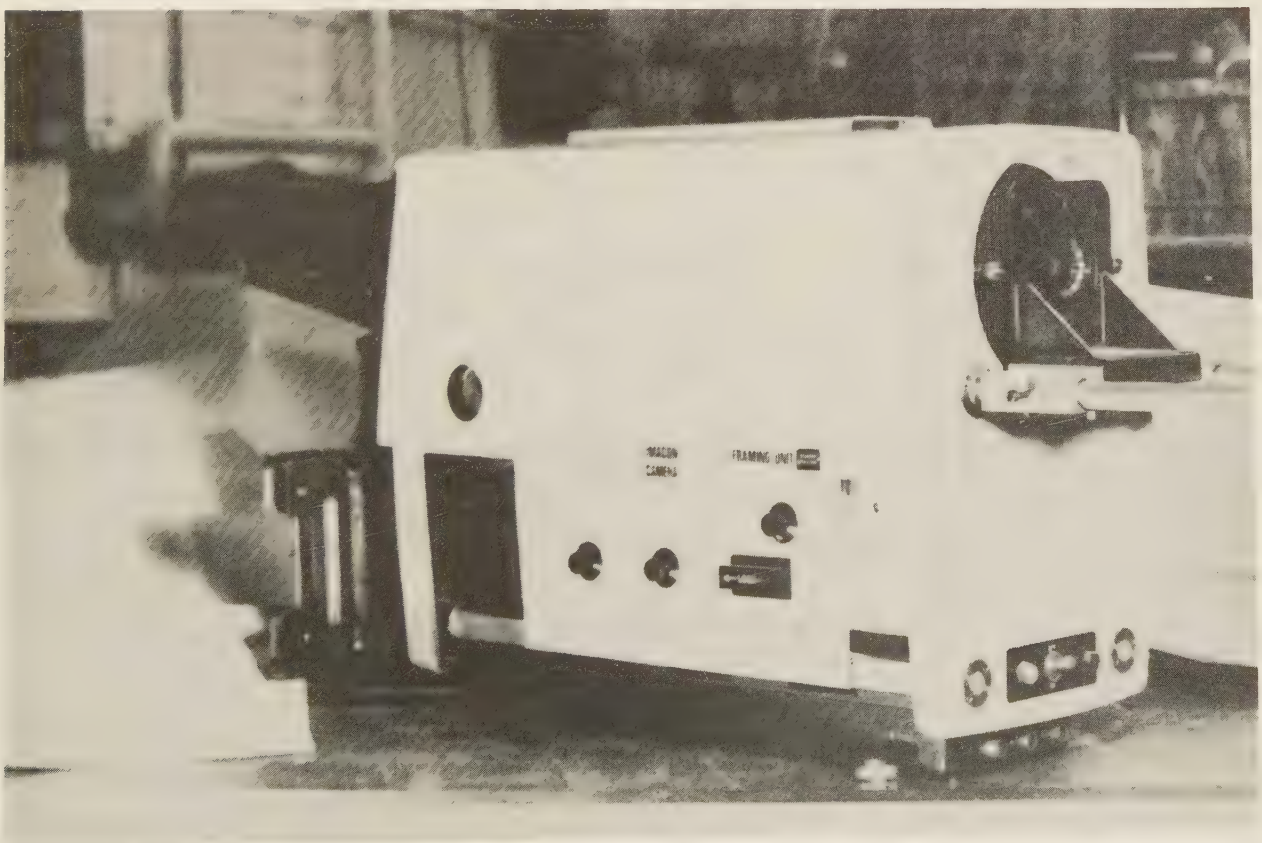


Fig. 5.16 _ Caméra ultra-rapide

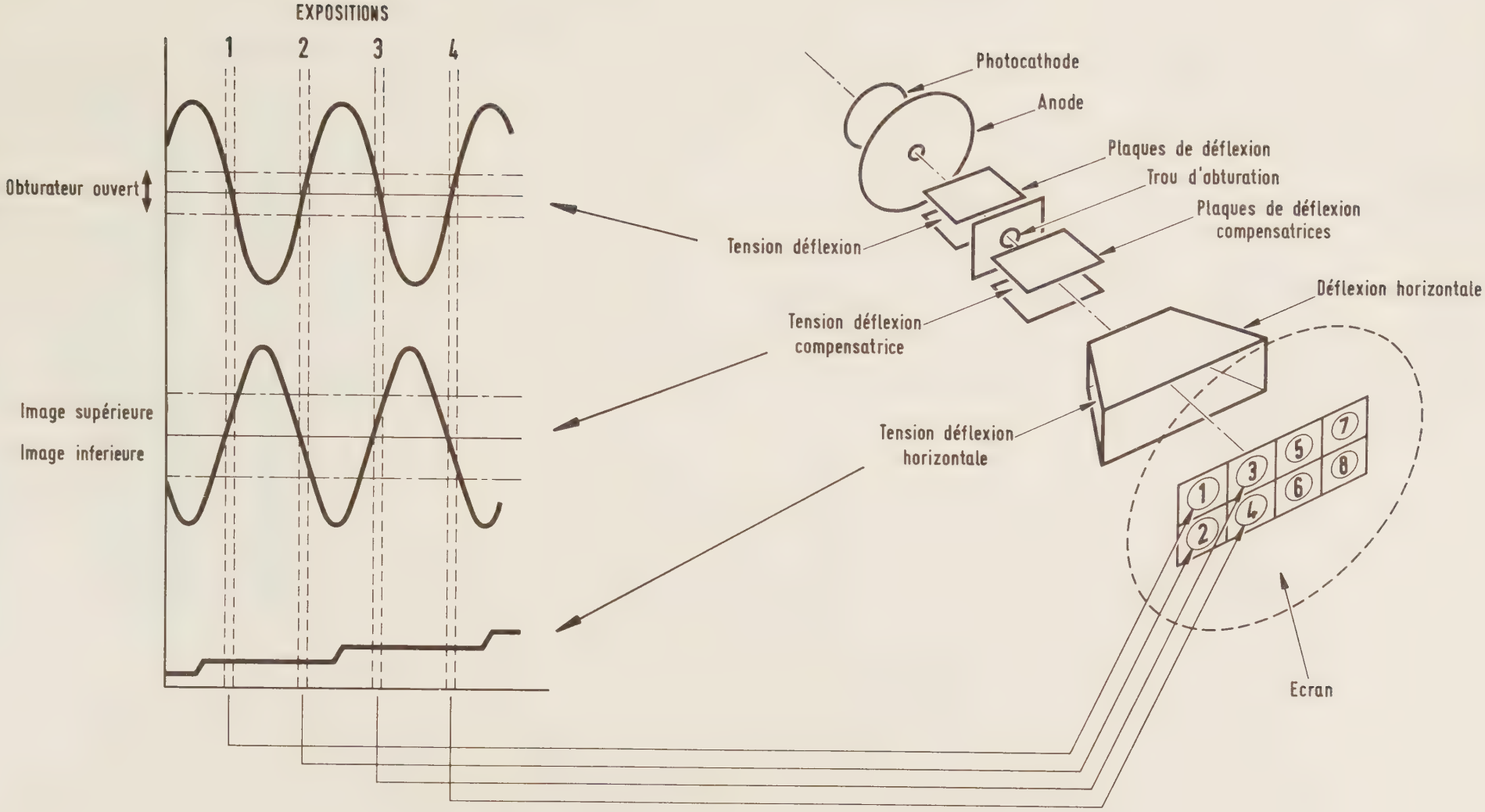


Fig. 5_17 _ Diagramme de la commande du tube convertisseur d'images

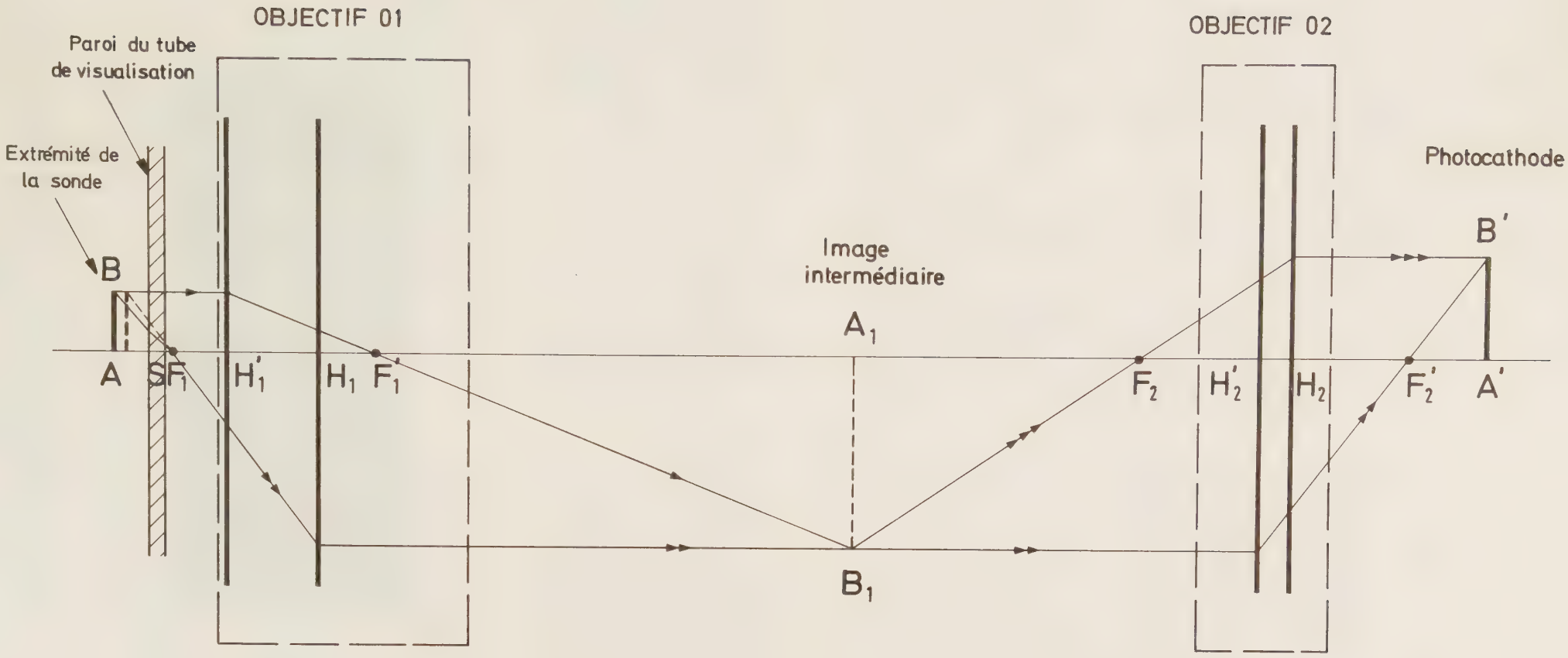


Fig. 5.18 _ Optique d'entrée de la caméra (éch. 1/2)

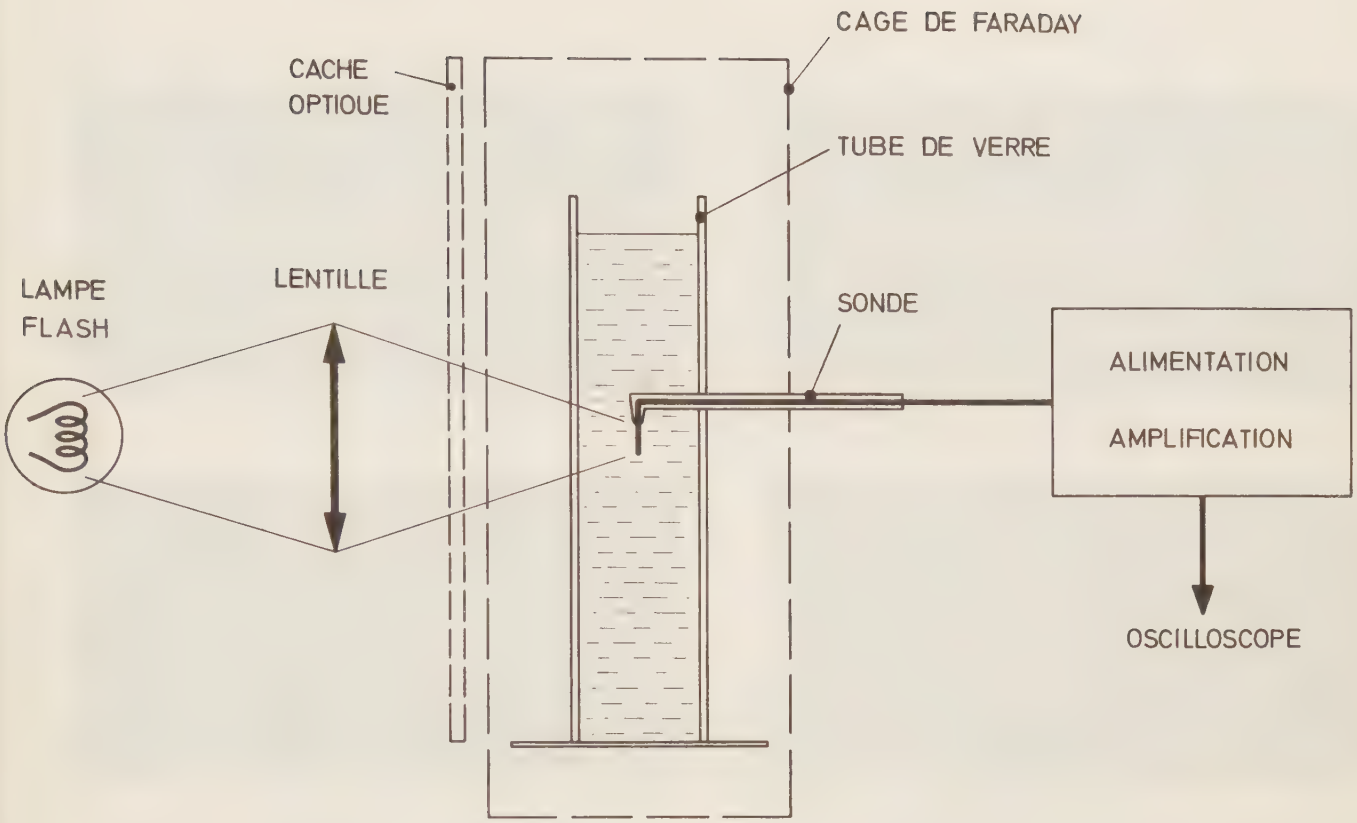


Fig. 5 . 19 _ Montage utilisé pour la détection du parasite crée par la lumière de la lampe flash

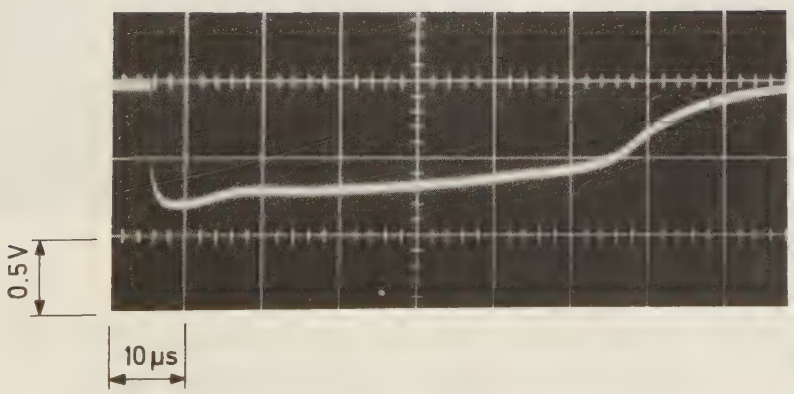


Fig. 5 . 20 _ Courbe d'intensité lumineuse du flash en fonction du temps

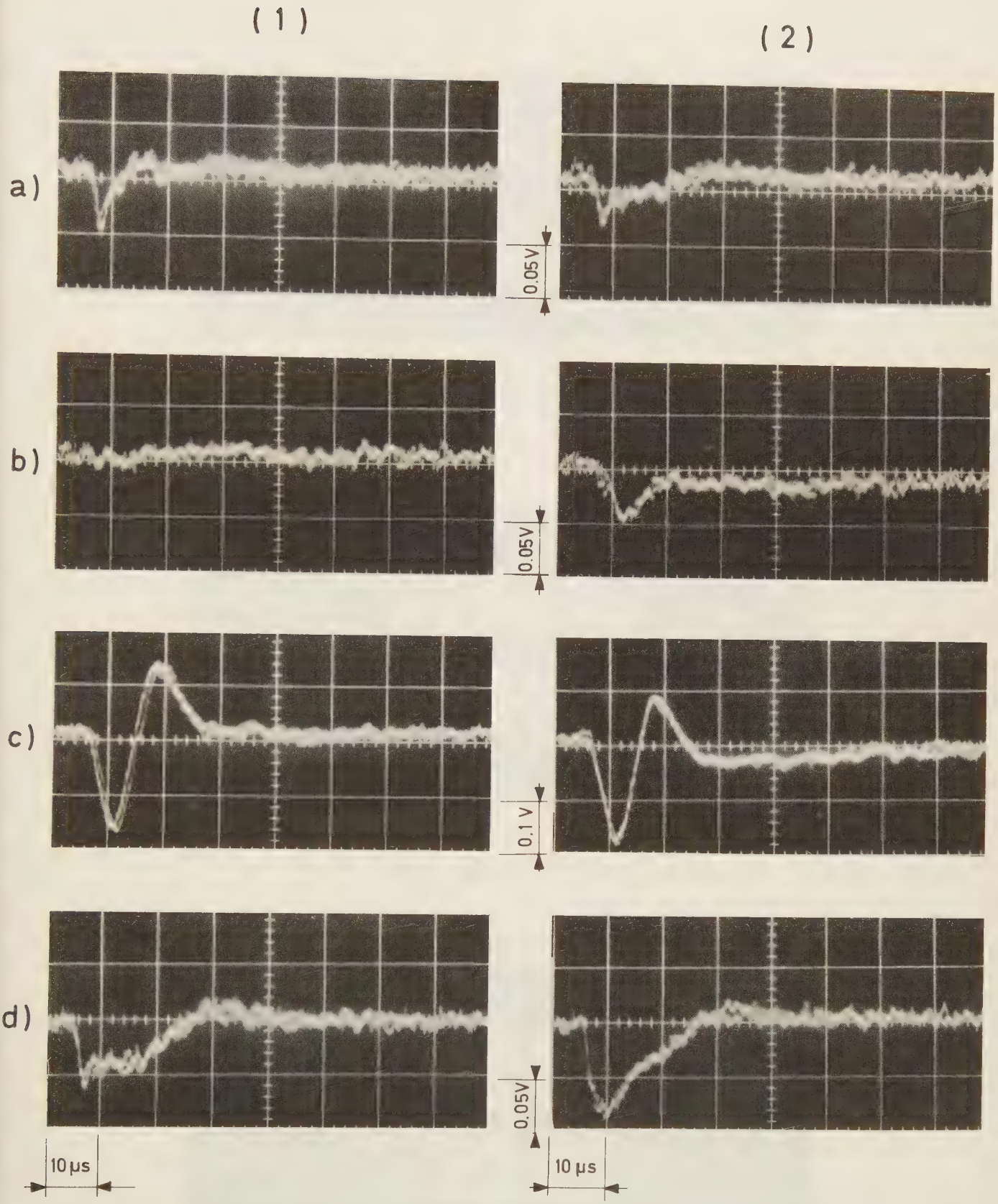


Fig. 5 . 21 _ Comparaison des signaux reçus sur la sonde en présence (1) et en absence (2) du cache optique pour :

(a) de l' eau permutée

(b) de l ' eau industrielle

(c) un mélange eau - acide nitrique

(d) un mélange eau _ ammoniaque

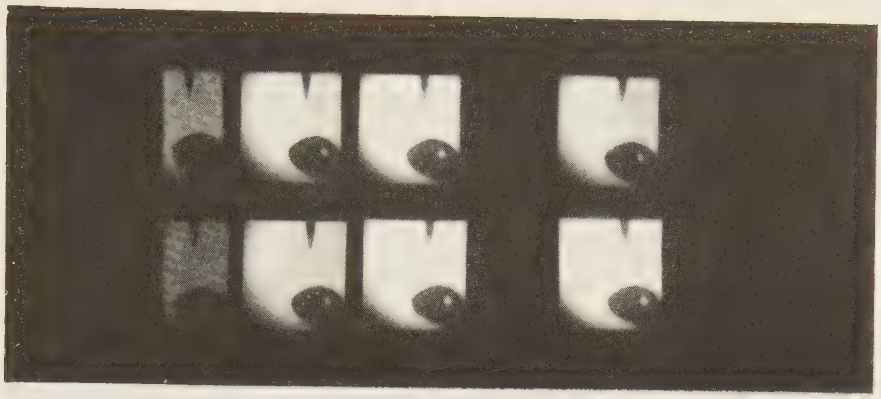


Fig. 5 . 22 _ $Q_L = 19\ m^3/h$, g = 3

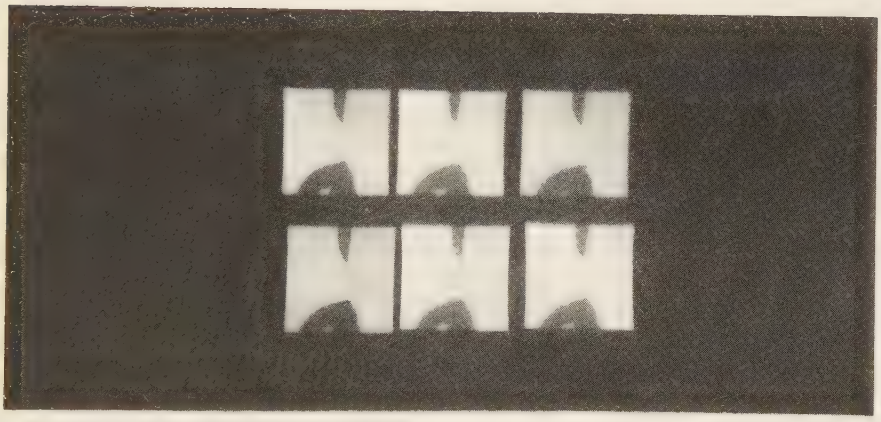


Fig. 5 . 23 _ $Q_L = 19\ m^3/h$, g = 5

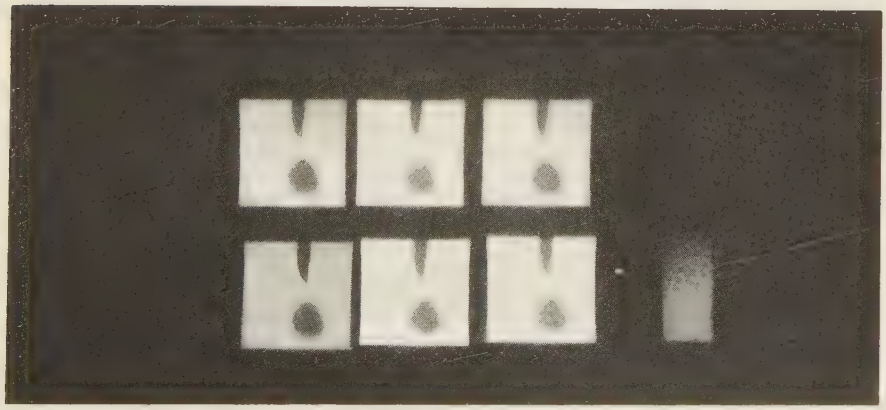


Fig. 5 . 24 _ $Q_L = 19\ m^3/h$, g = 5

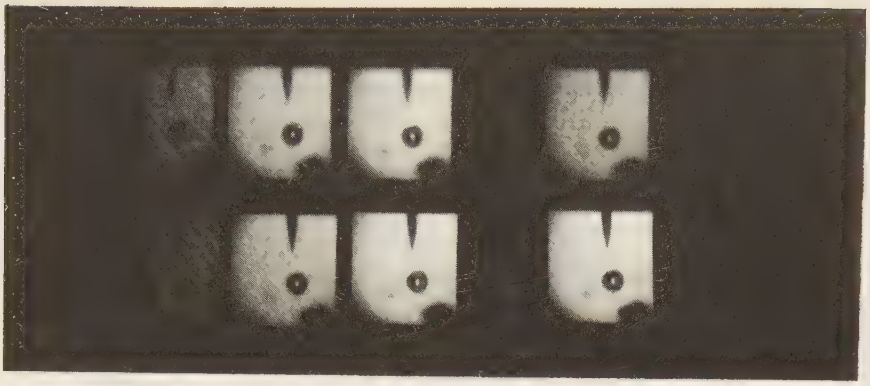


Fig. 5 . 25 _ $Q_L = 20\ m^3/h$, $g \simeq 3$

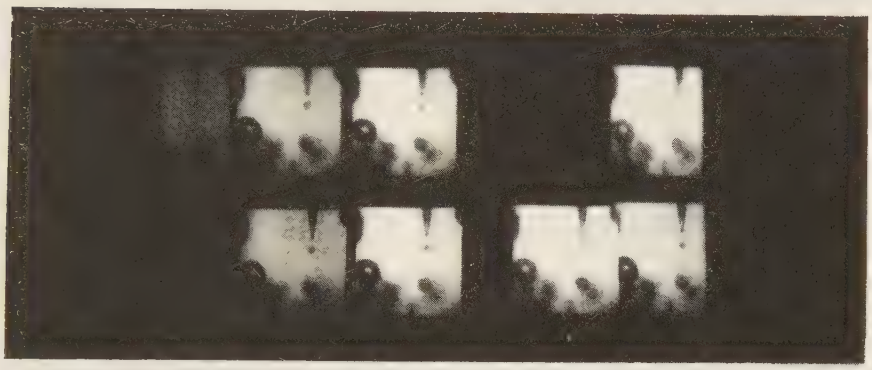


Fig. 5 . 26 _ $Q_L = 19\ m^3/h$, $g \simeq 3$

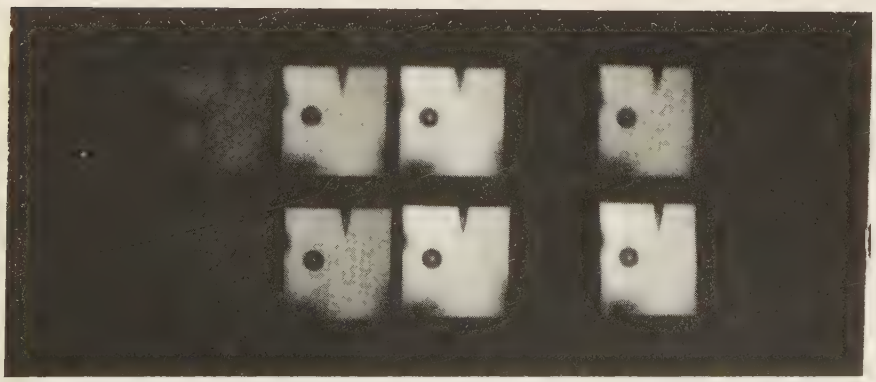


Fig. 5 . 27 _ $Q_L = 20\ m^3/h$ $g = 3$

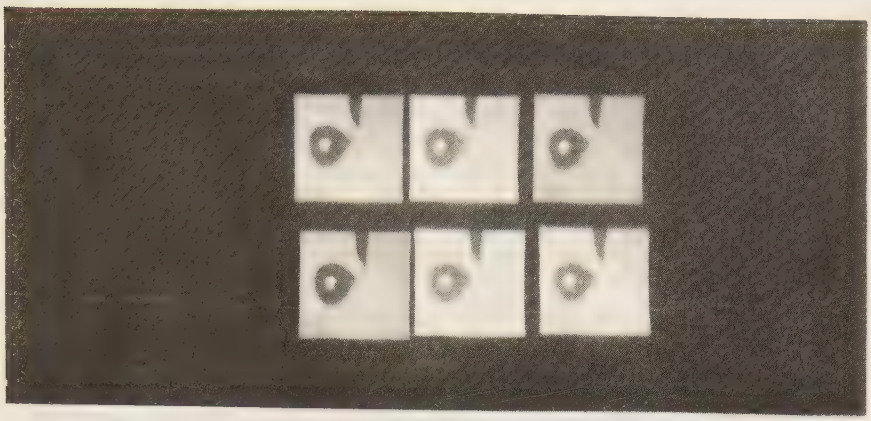


Fig. 5 . 28 – Q_L = 19 m^3/h , g = 5

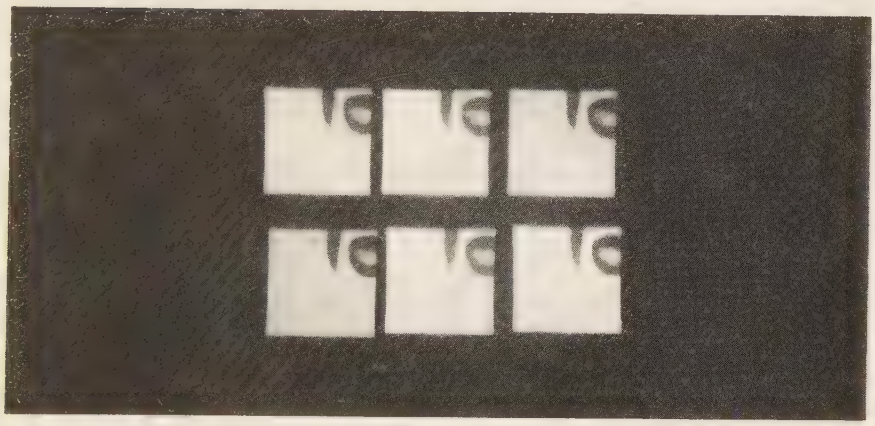


Fig. 5 . 29 – Q_L = 19 m^3/h , g = 5

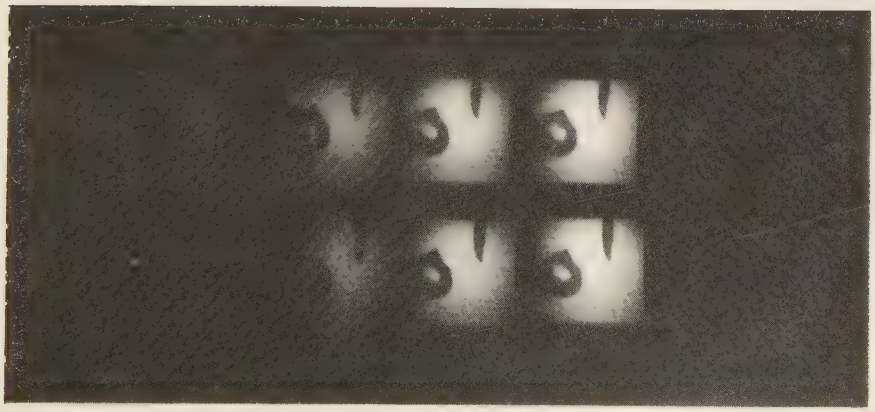


Fig. 5 . 30 – Q_L = 18 m^3/h , g = 4

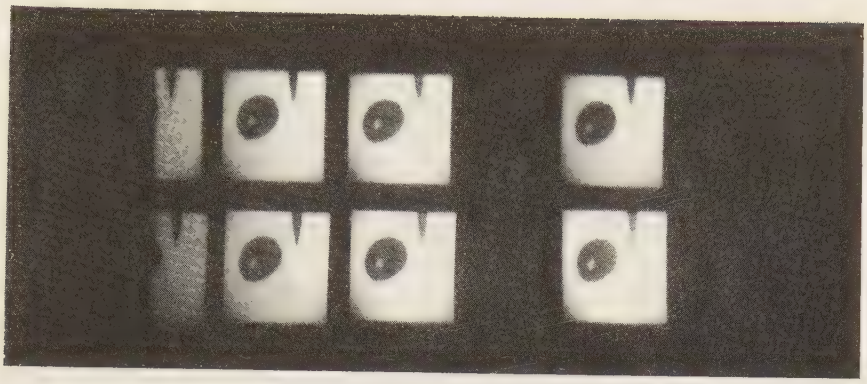


Fig. 5 . 31 $Q_L = 19\ m^3/h$, $g \simeq 3$

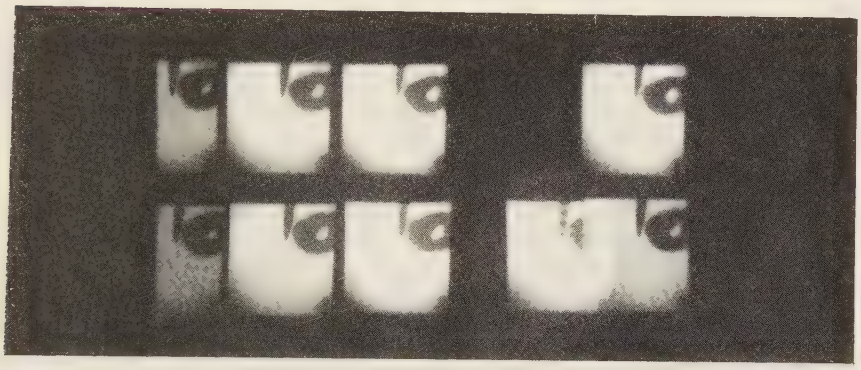


Fig. 5 . 32 _ $Q_L = 20\ m^3/h$, $g \simeq 3$

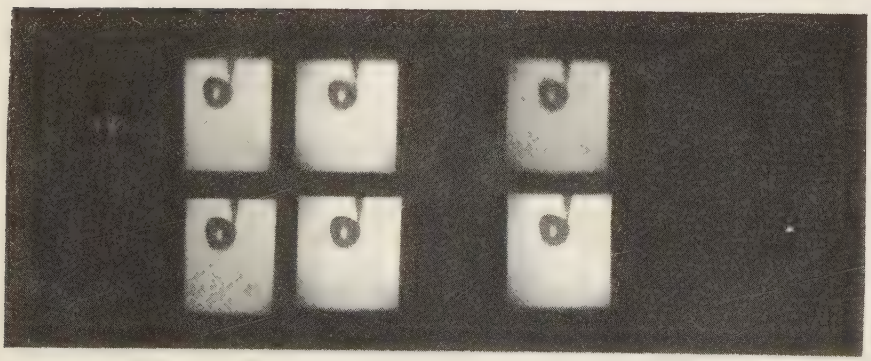


Fig. 5 . 33 _ $Q_L = 18\ m^3/h$, $g = 3$

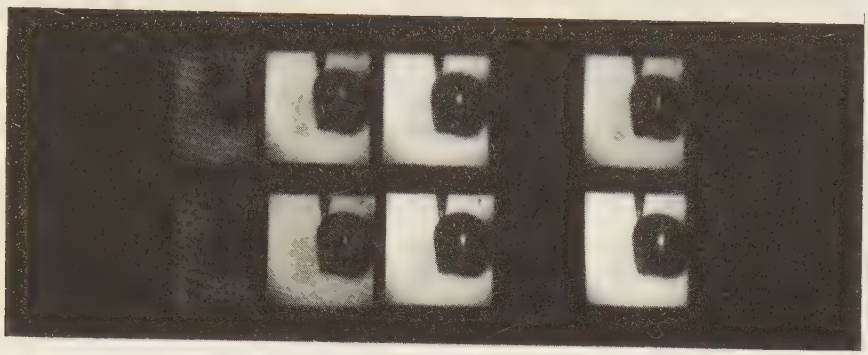


Fig. 5 . 34 – $Q_L = 20\ m^3/h$, $g \simeq 3$

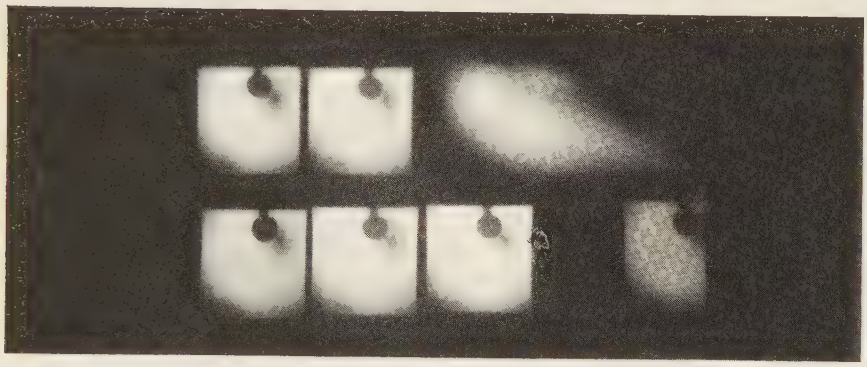


Fig. 5 . 35 – $Q_L = 18\ m^3/h$, $g \simeq 3$

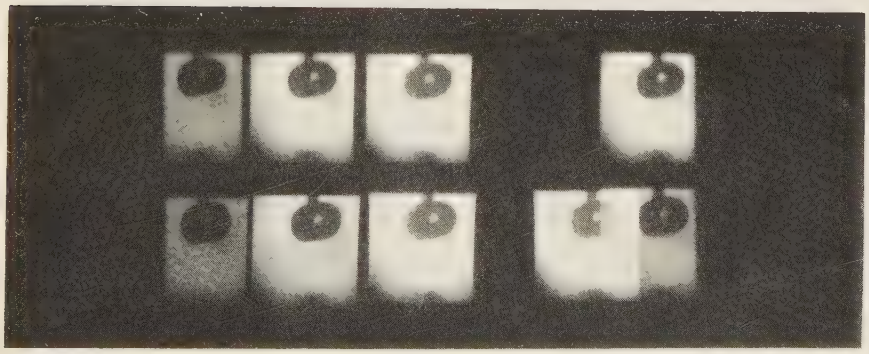


Fig. 5 . 36 – $Q_L = 20\ m^3/h$, $g \simeq 3$

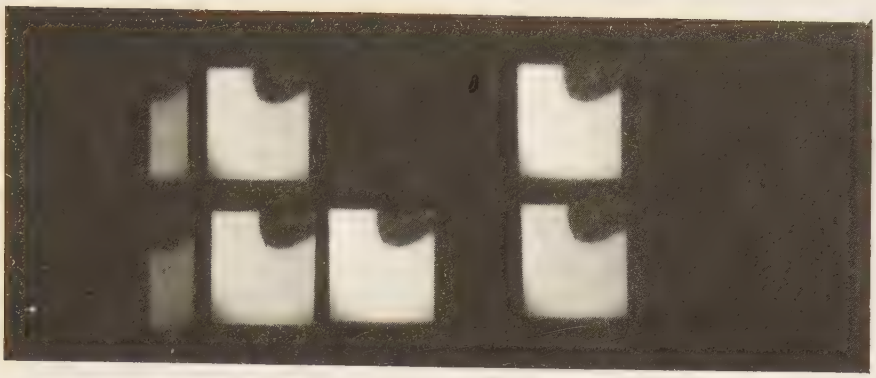


Fig. 5 . 37 – Q_L = 20 m^3/h , g ≃ 3

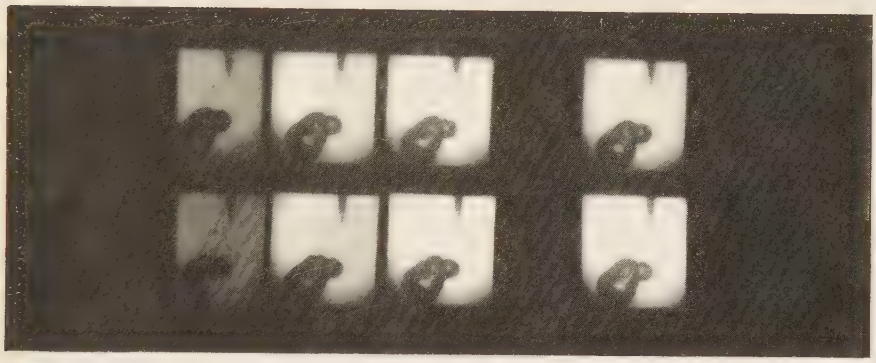


Fig. 5 . 38 – Q_L = 19 m^3/h , g ≃ 3

Fig. 5 . 39 – Q_L = 19 m^3/h , g ≃ 3

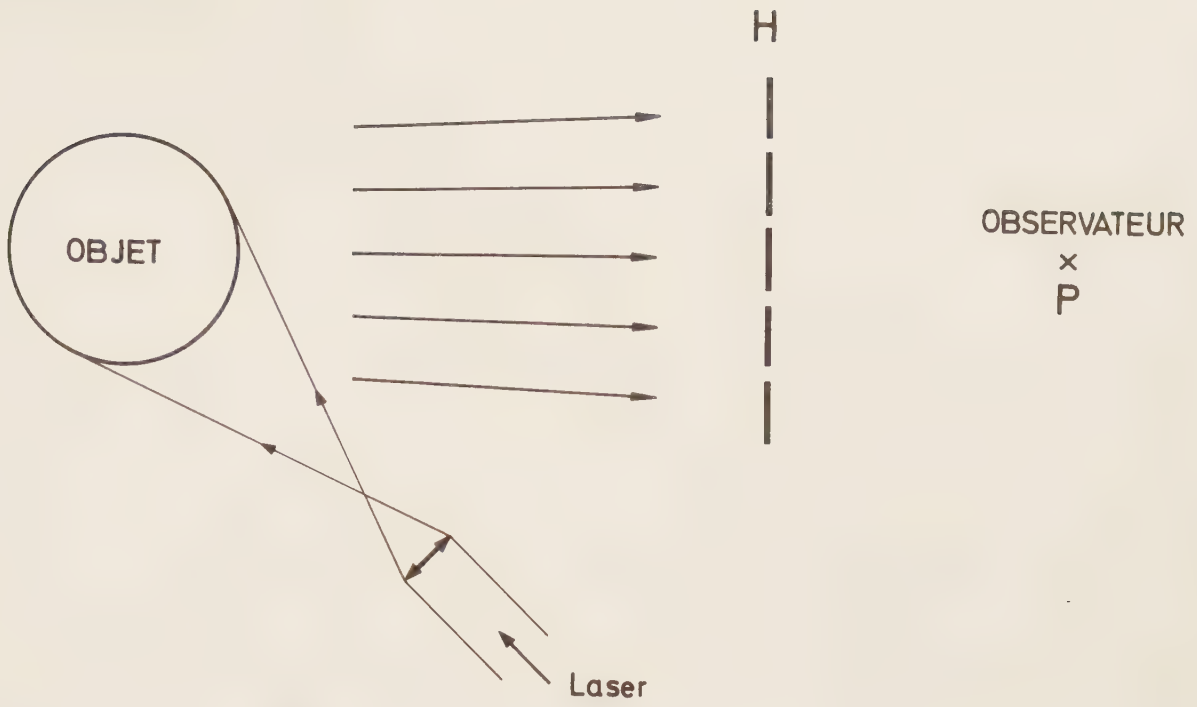


Fig. 6 . 1 _ Onde émise en H, par un objet O , éclairé en lumière cohérente

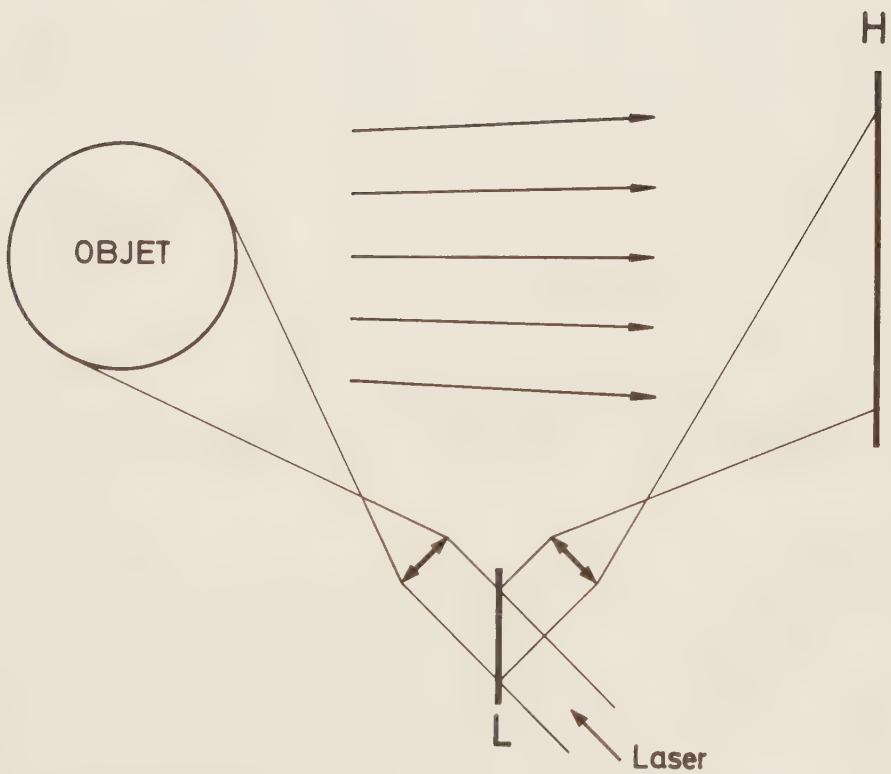


Fig. 6 . 2 _ Principe de l'enregistrement d'un hologramme

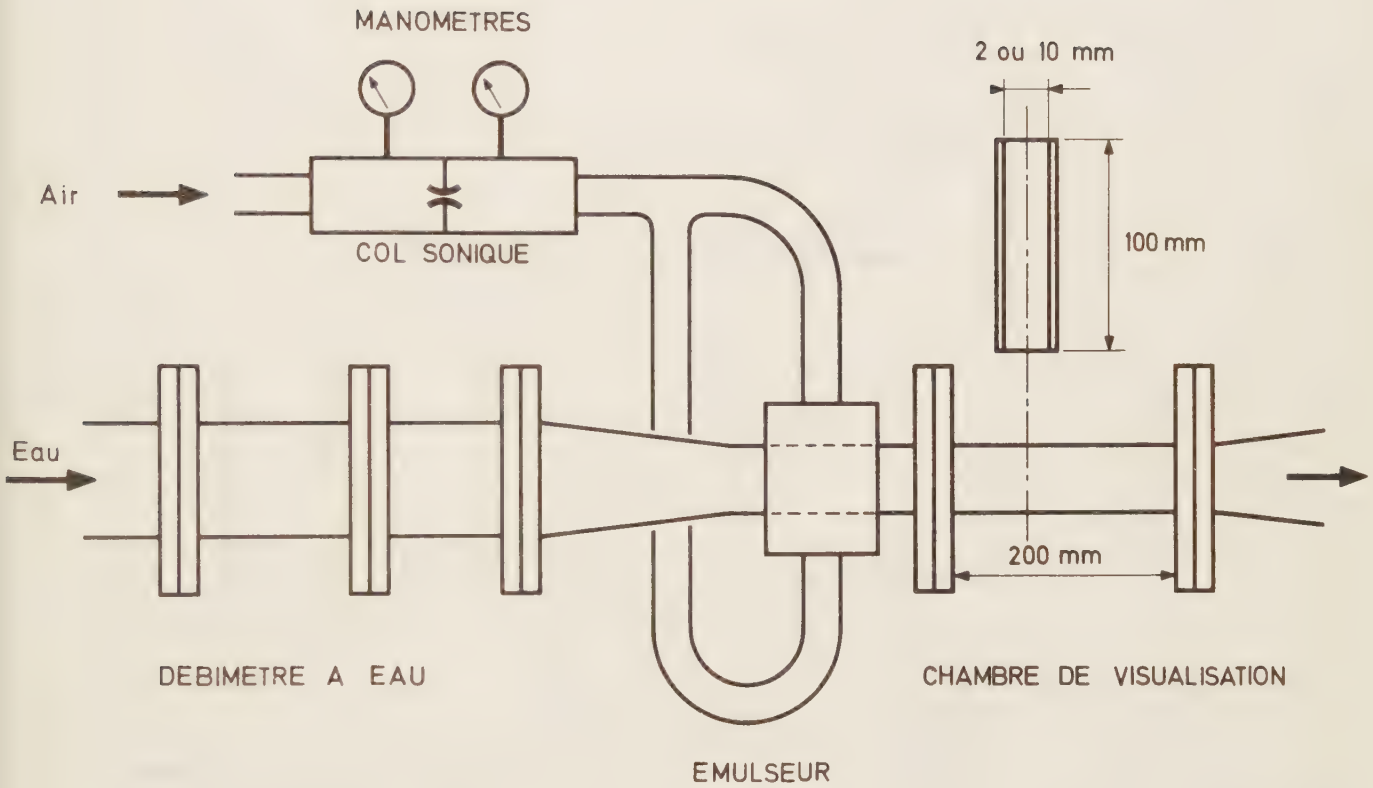


Fig. 6 . 3 _ Schéma de l'installation " HOLOGRAPHIE "

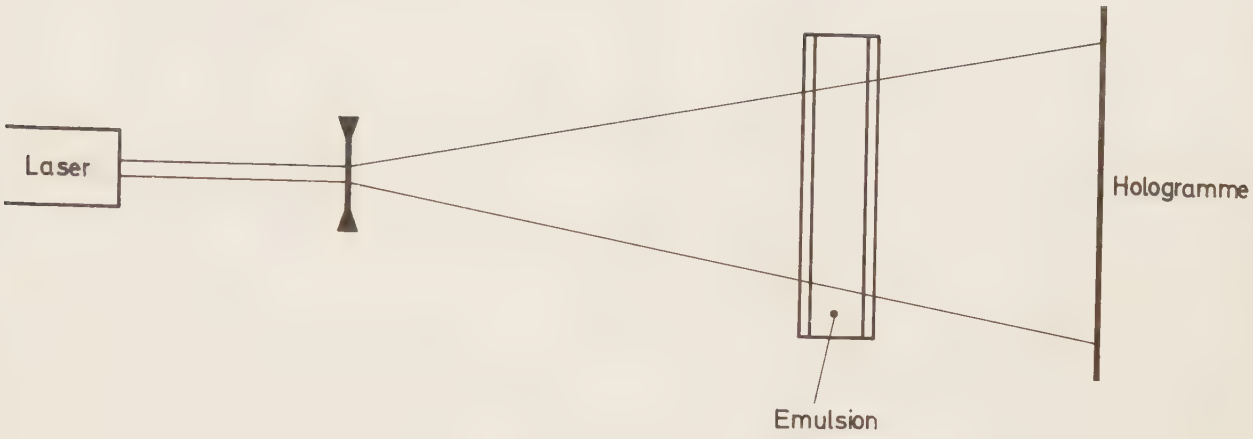


Fig. 6 . 5 _ Montage de Gabor

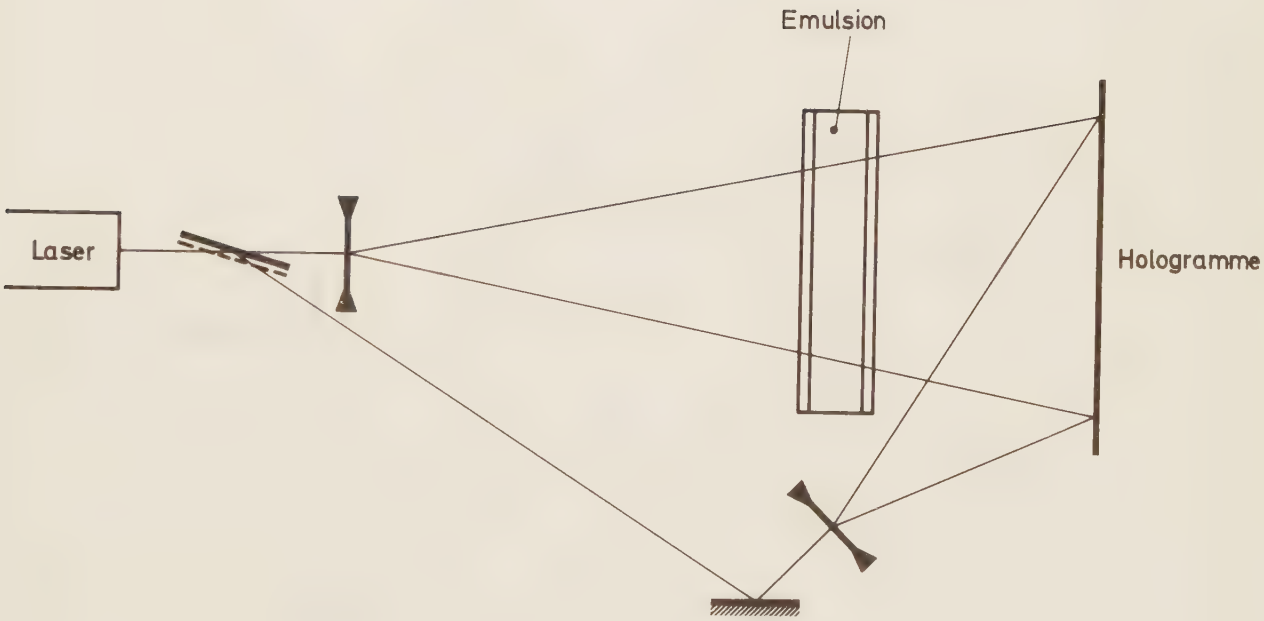


Fig. 6 . 6 _ Hologramme avec référence inclinée en lumière transmise

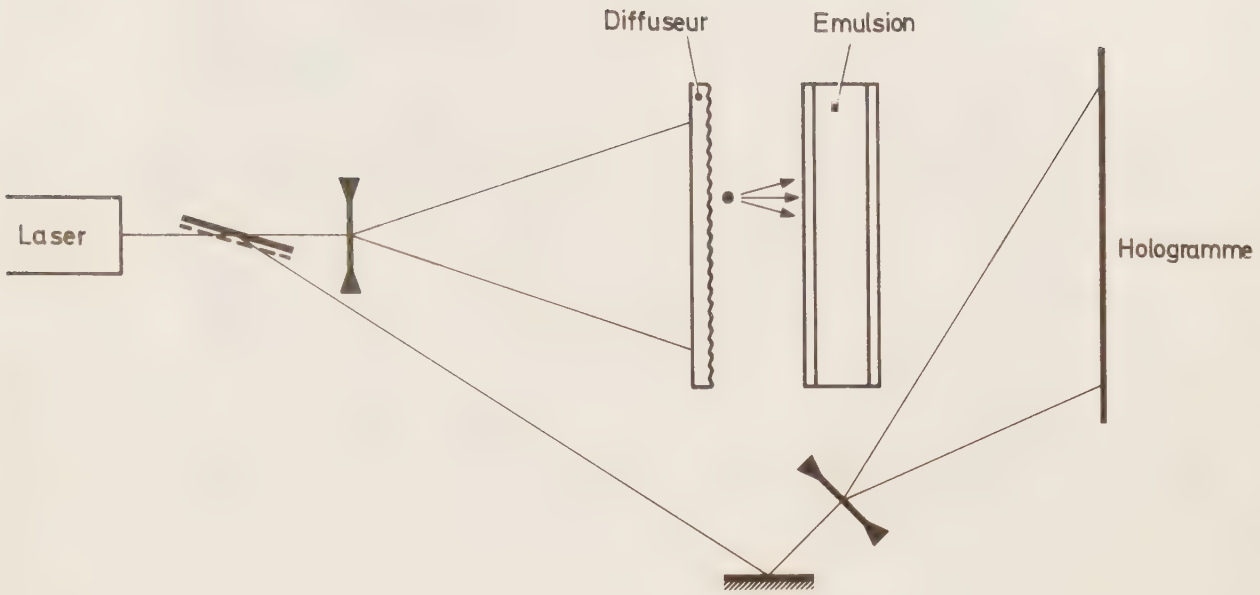


Fig. 6 . 7 _ Hologramme avec référence inclinée en lumière diffuse par transmission

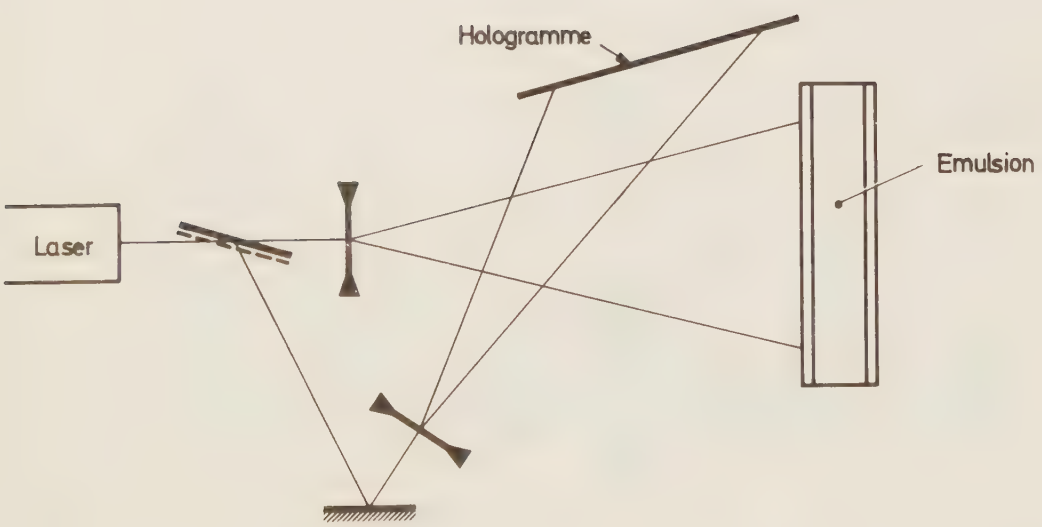


Fig. 6 . 8 _ Hologramme en lumière réfléchie avec référence inclinée

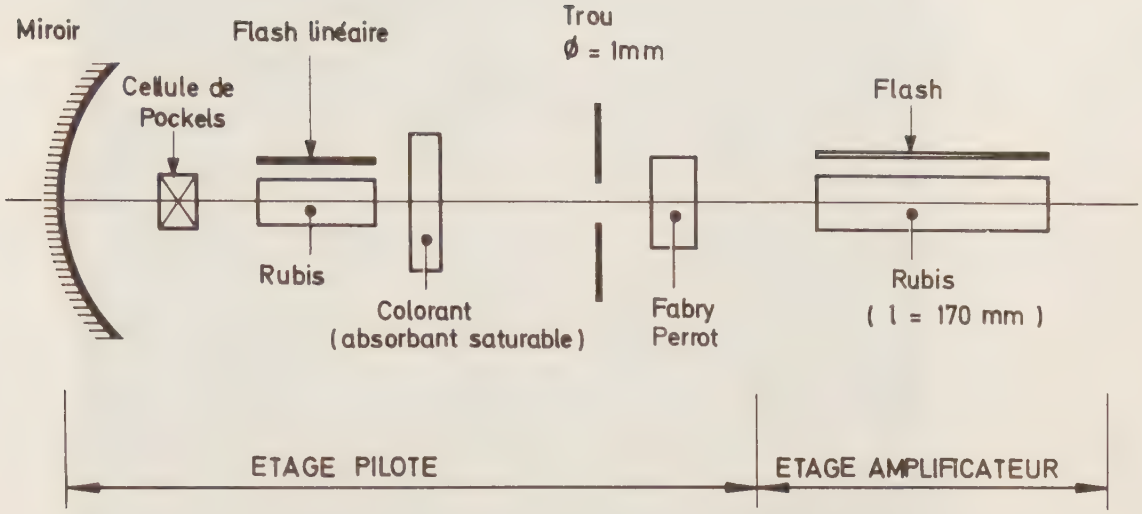


Fig. 6 . 9 _ Schéma du laser à rubis

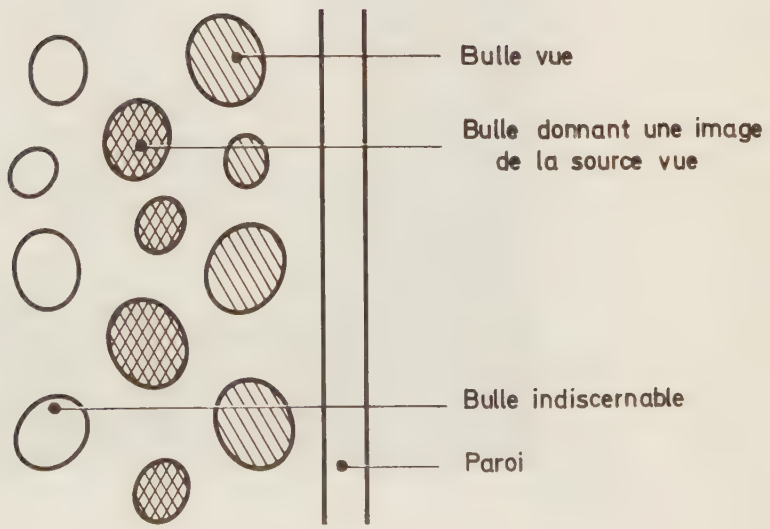
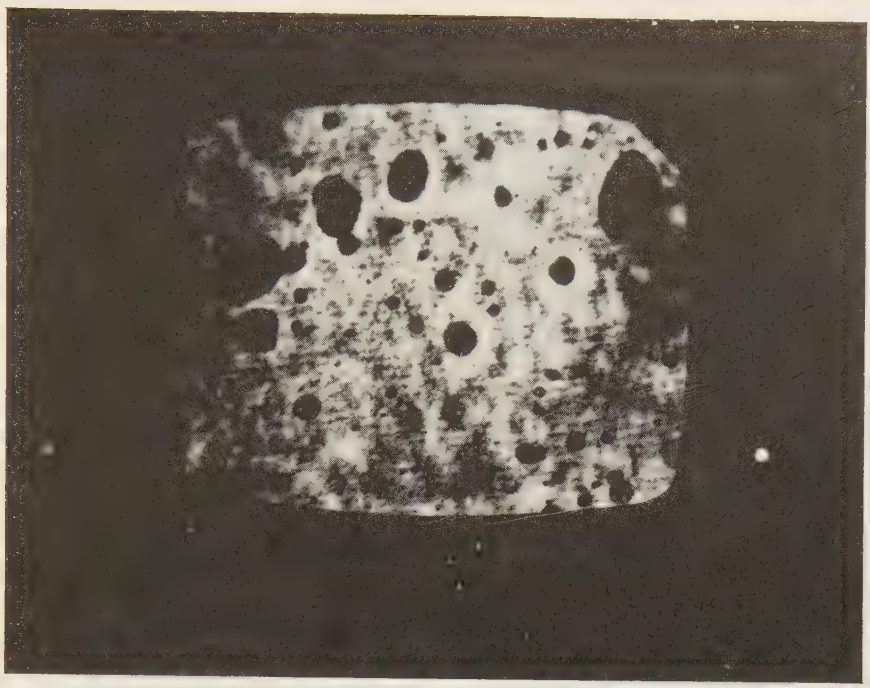
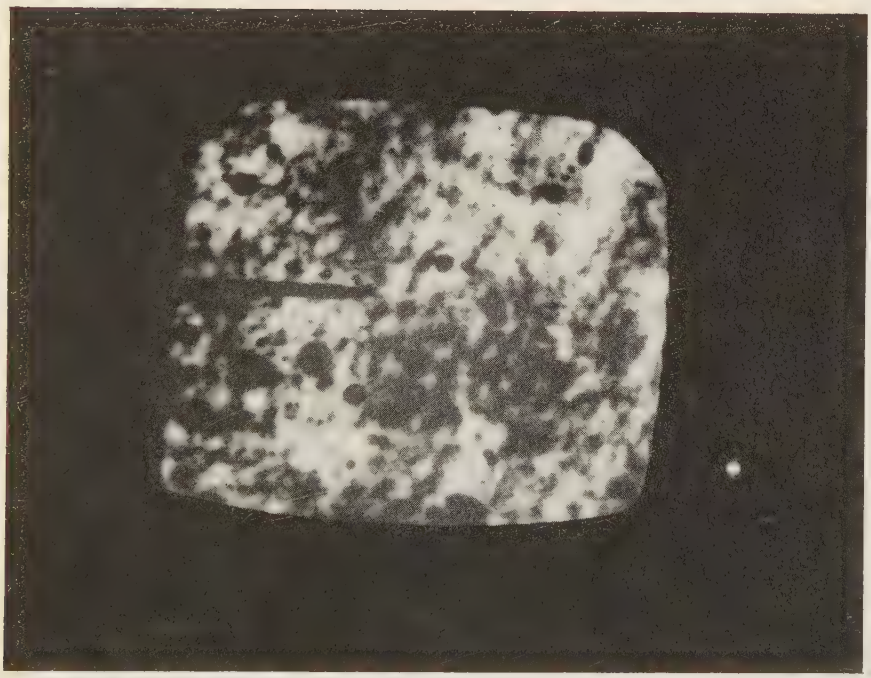


Fig. 6 . 10 _ Interprétation des résultats obtenus à fort taux de vide dans le montage par référence inclinée



a)



b)

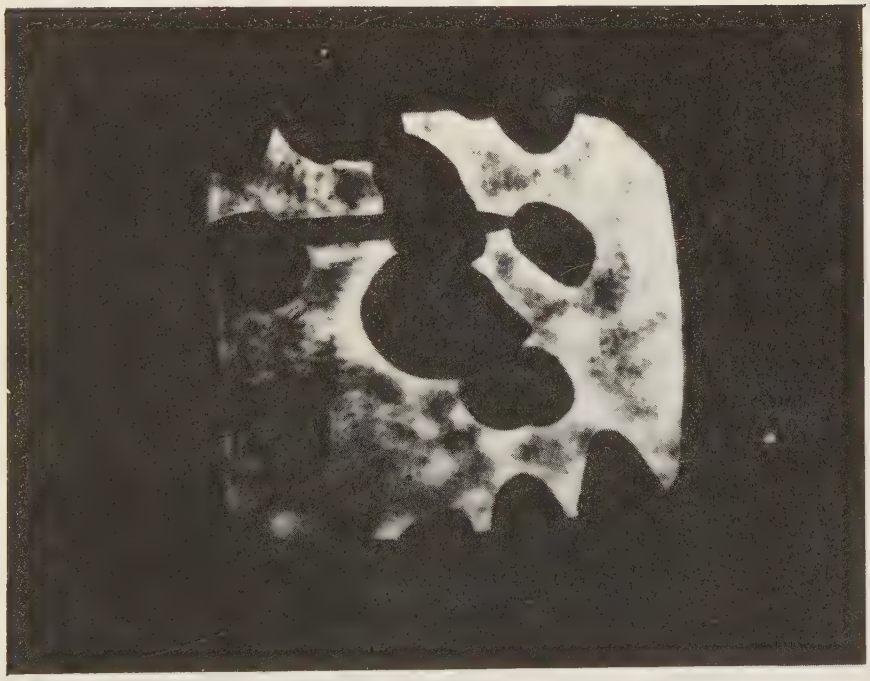
Fig. 6 . 11 _ Montage par référence inclinée

h = 10 mm , Q_L = 5,5 m^3/h , α = 5 % , V_L = 1,5 m/s

Deux photographies du même hologramme dans deux plans différents de mise au point

a) : g = 13 b) : g = 10

(a)



(b)

Fig. 6 _ 12 _ Montage par référence inclinée

$h = 10\,mm$, $Q_L = 5{,}5\ m^3/h$, $\alpha = 10\,\%$, $g = 17{,}5$

Deux photographies du même hologramme dans deux plans différents de mise au point

Fig. 6 . 13 _ Montage par référence inclinée avec diffuseur

$h = 10$ mm , $Q_L = 2\ m^3/h$, $\alpha = 0{,}9$, $V_L = 5{,}5$ m/s , $g \simeq 1$

Fig. 6 . 14 _ Montage par réflexion

$h = 10$ mm , $Q_L = 2\ m^3/h$, $\alpha = 0{,}9$, $g \simeq 1$

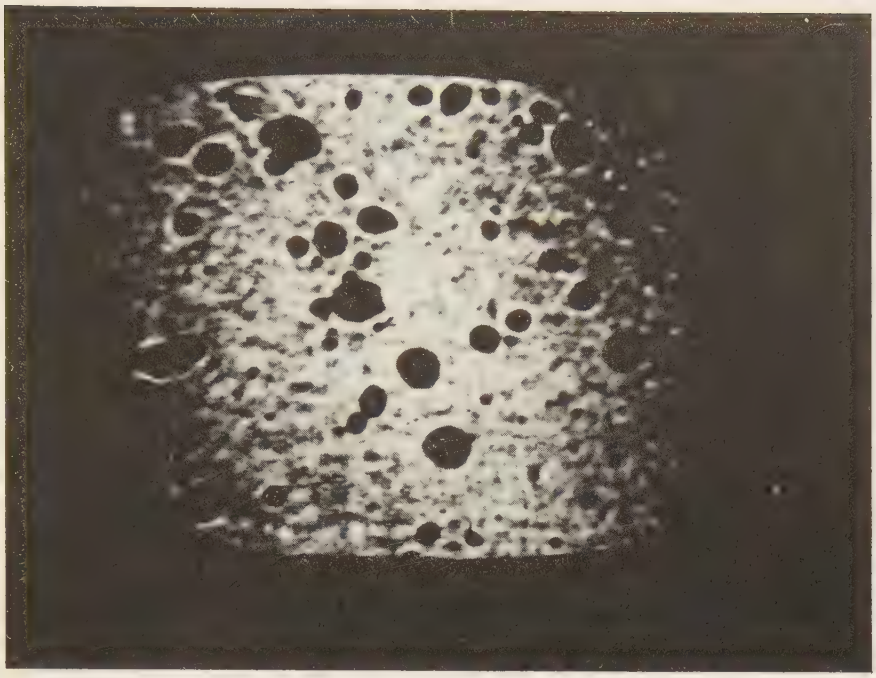


Fig. 6 . 15 _ Montage par référence inclinée

$h = 2\,mm$, $Q_L = 1{,}7\ m^3/h$, $\alpha = 5\,\%$, $V_L = 2{,}4\ m/s$, $g = 10$

Fig. 6 . 16 _ Montage par référence inclinée

$h = 2\,mm$, $Q_L = 1{,}7\ m^3/h$, $\alpha = 0{,}89$, $V_L = 24\ m/s$, $g = 13$

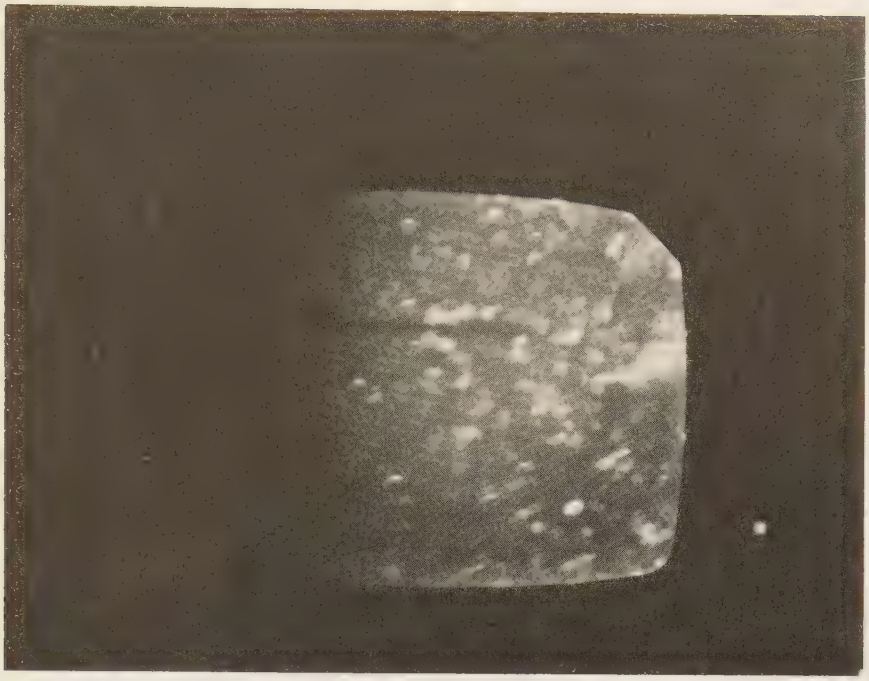


Fig. 6 . 17 _ Montage par référence inclinée

$h = 2\,mm$, $Q_L = 5{,}1\ m^3/h$, $\alpha = 0{,}5$, $V_L = 14\ m/s$, $g = 10$

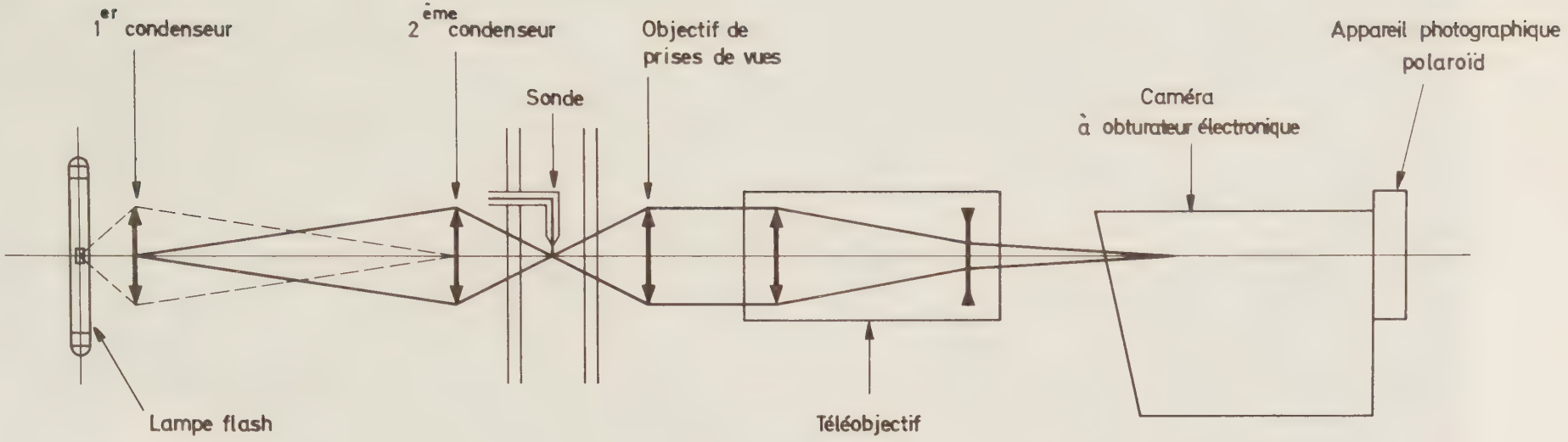


Fig. 7 . 1 _ Schéma du banc optique V . E . E

Fig. 7.2 _ Expérience V.E.E. : Installation et banc optique

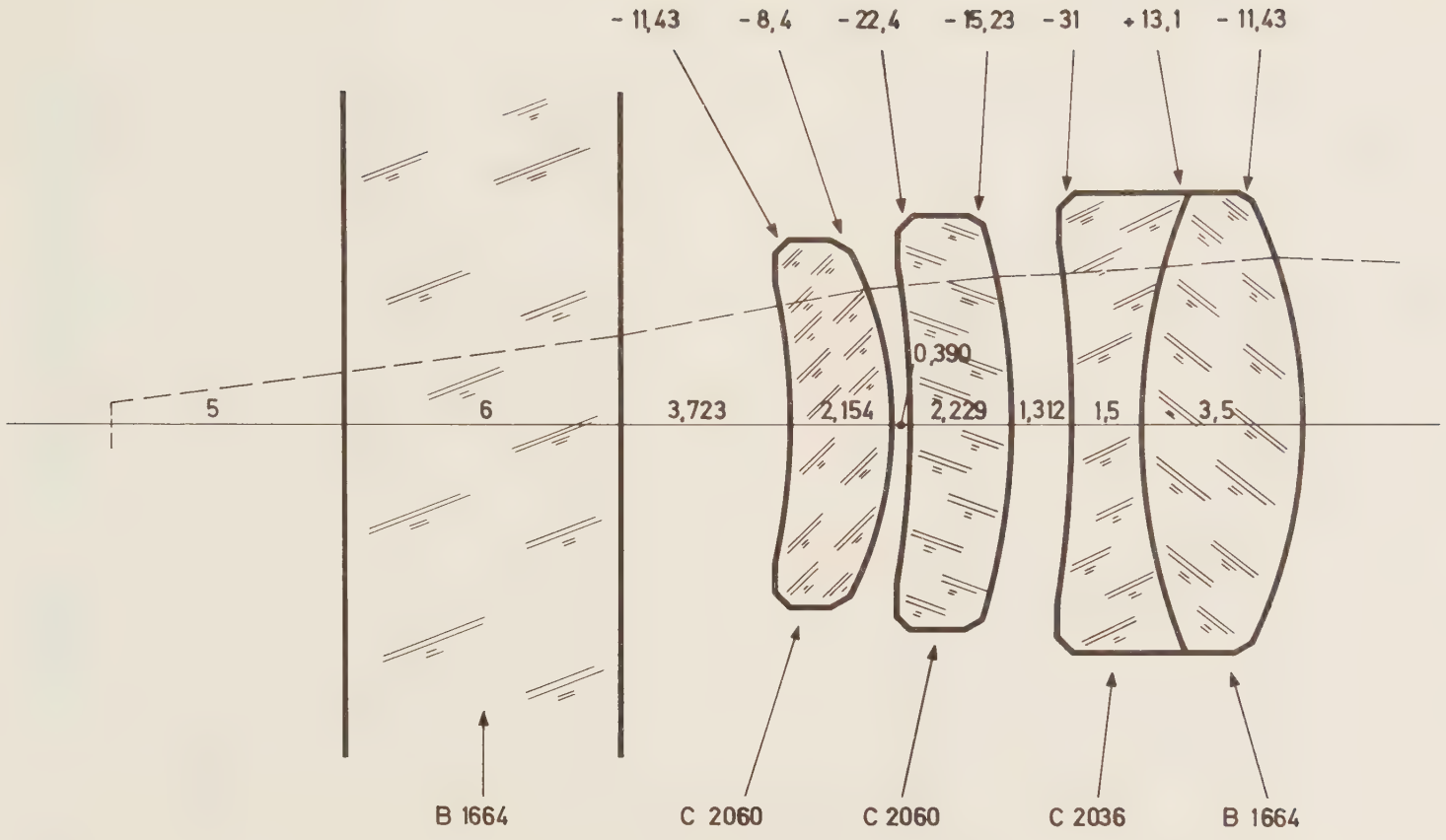


Fig. 7 . 3 _ Formule optique de l'objectif d'observation

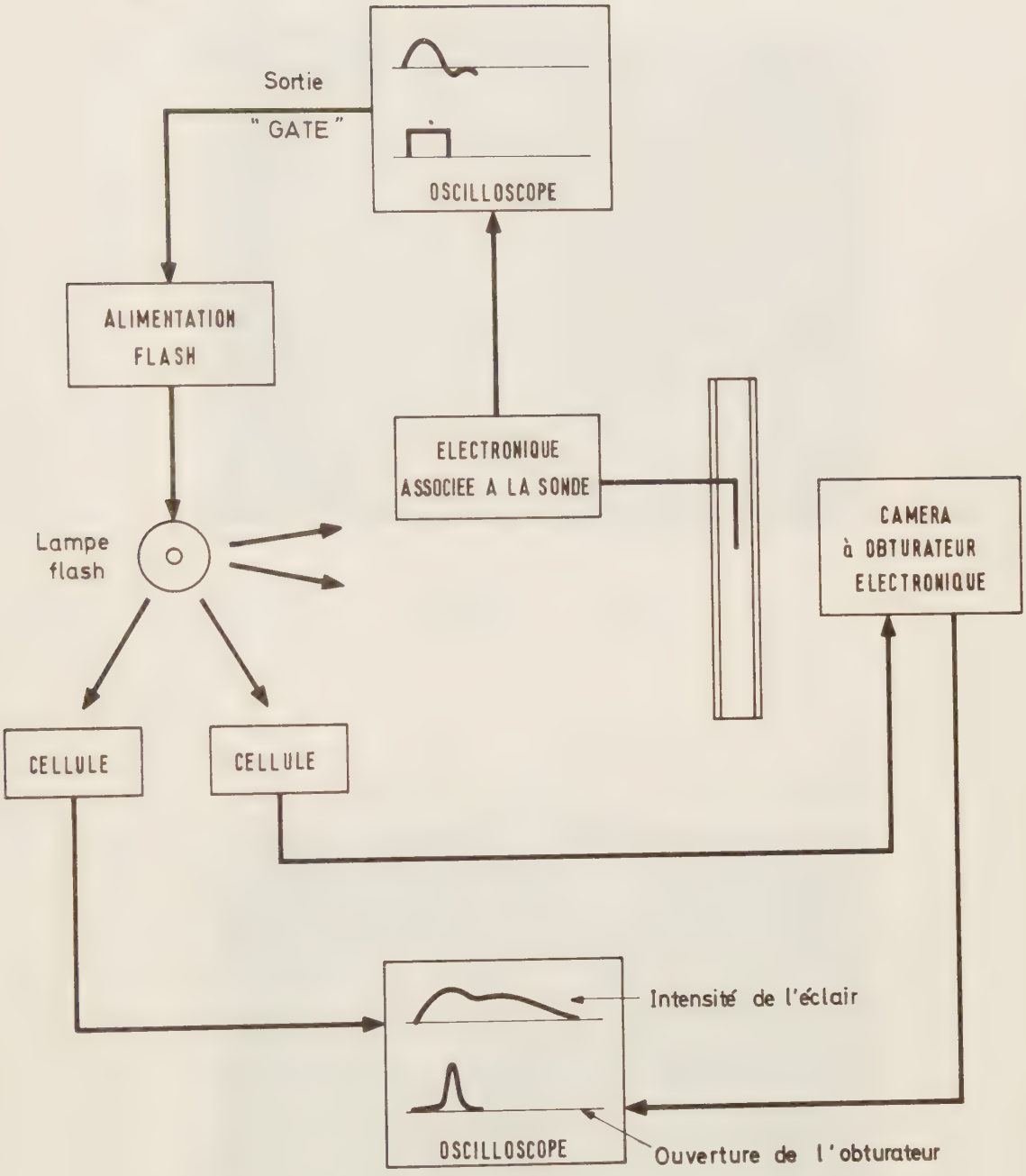


Fig. 7 . 4 _ Schéma du déclenchement des appareils de prise de vue V.E.E

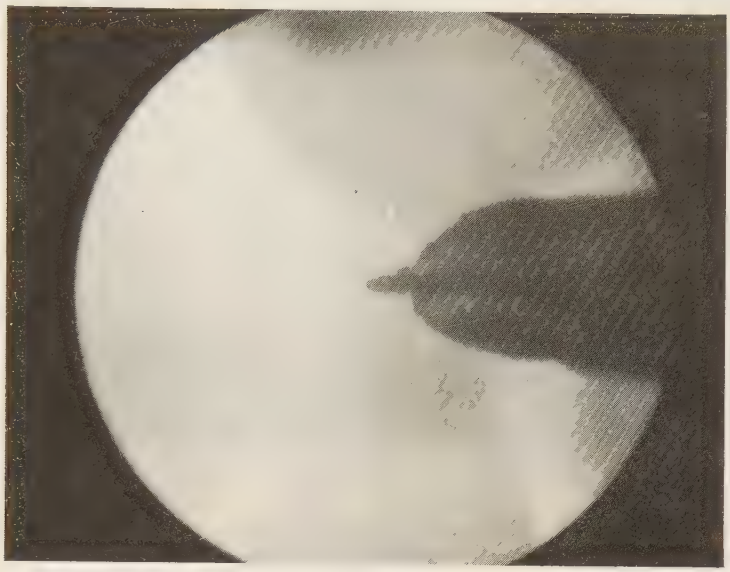


Fig. 7 . 5 _ Extrémité de la sonde

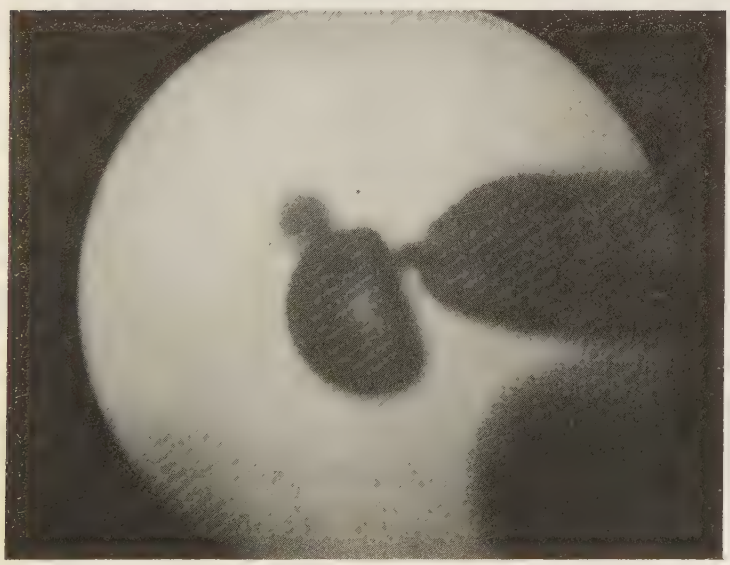
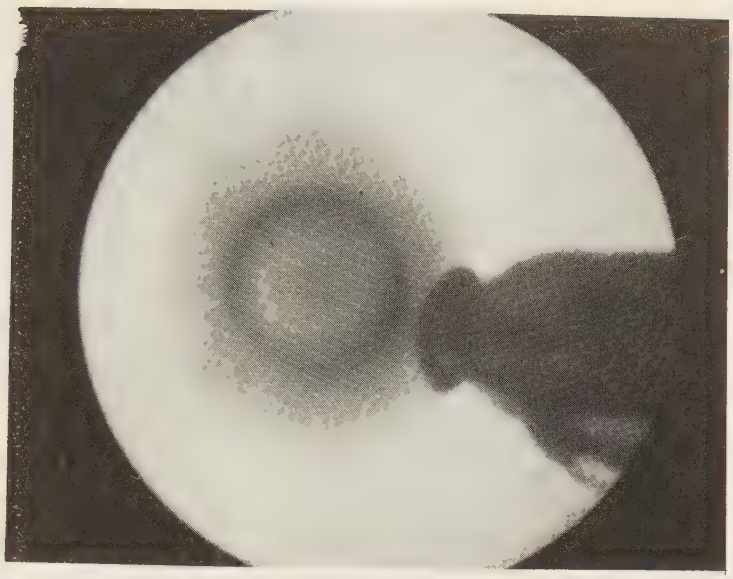
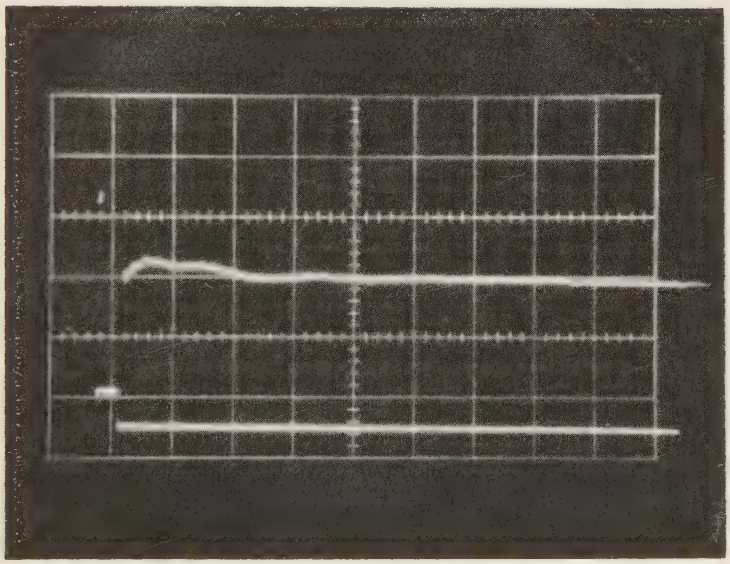


Fig. 7 . 6 _ Petite bulle ($\varnothing \simeq 200\ \mu$) au début de son empalement sur la sonde



(a)

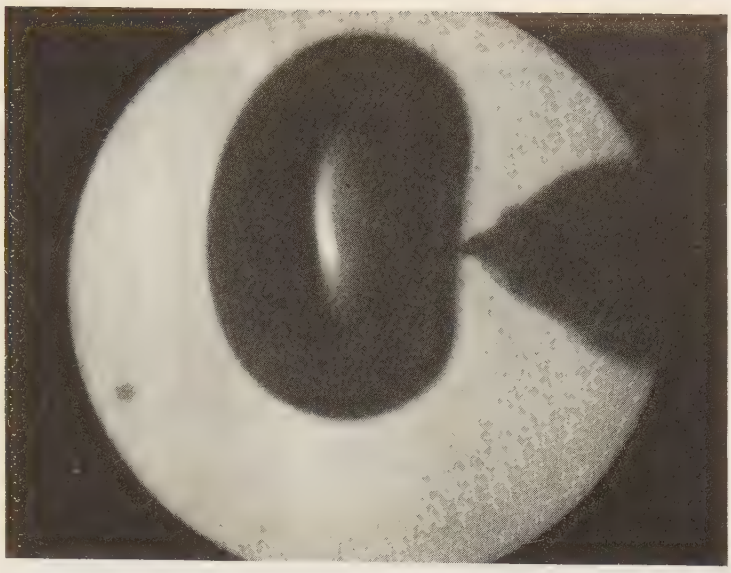


(b)

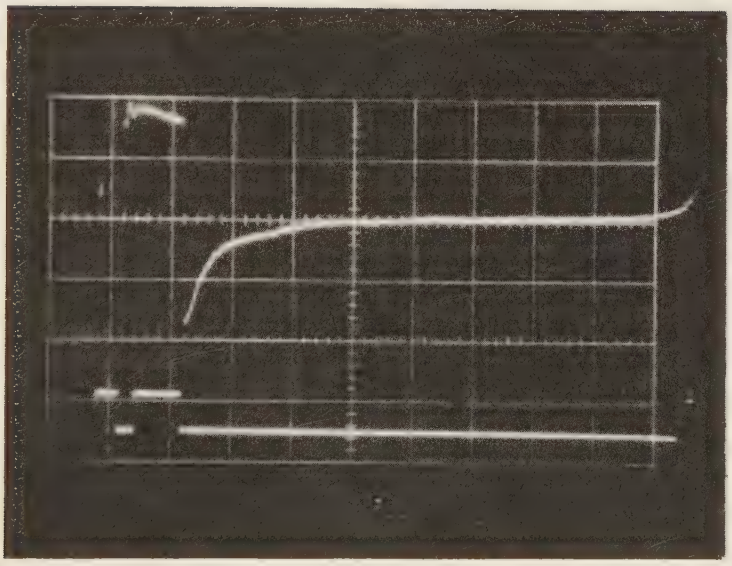
Fig. 7 . 7

a) Petite bulle ($\phi \simeq 150\ \mu$) entièrement empalée sur la sonde

b) Signal de la sonde correspondant



(a)

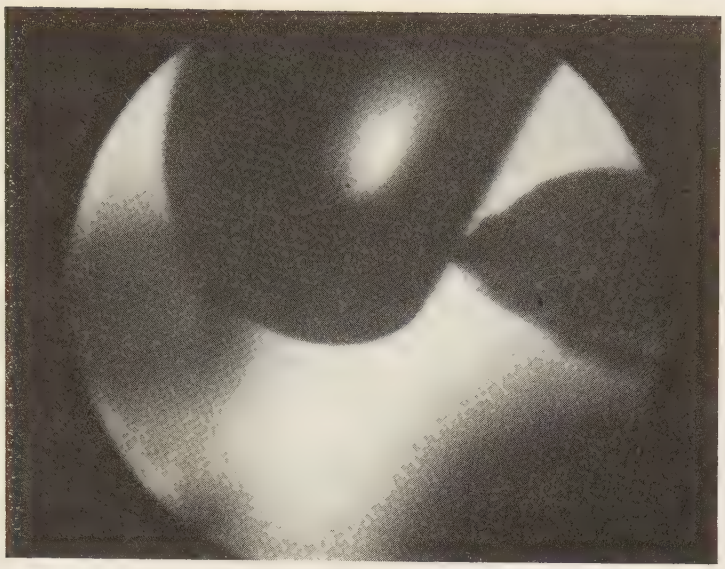


(b)

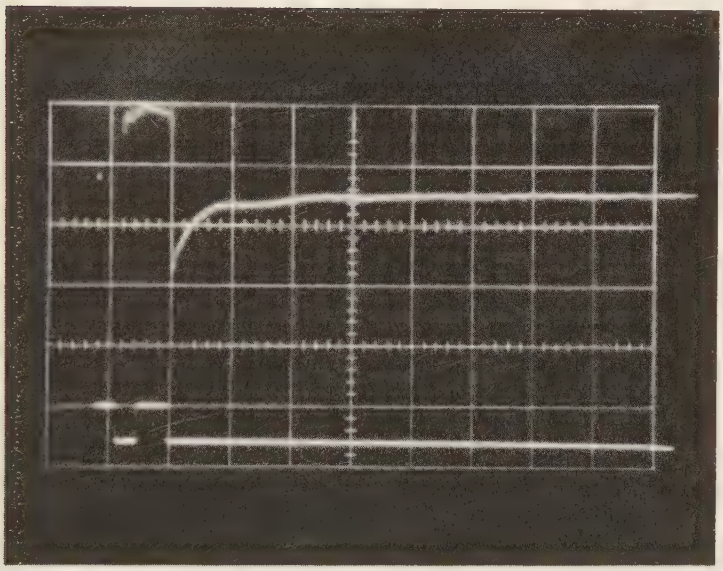
Fig. 7 . 8

a) Bulle moyenne ($\phi \simeq 500\ \mu$) au début de son empalement sur la sonde

b) Signal correspondant



(a)

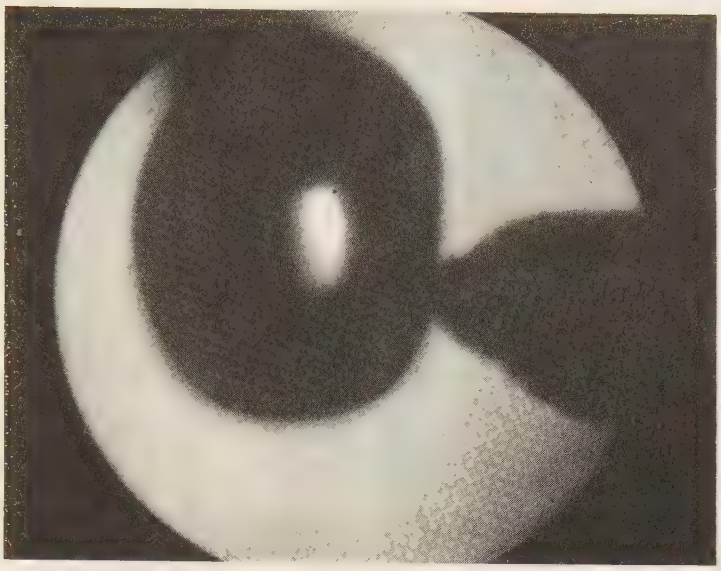


(b)

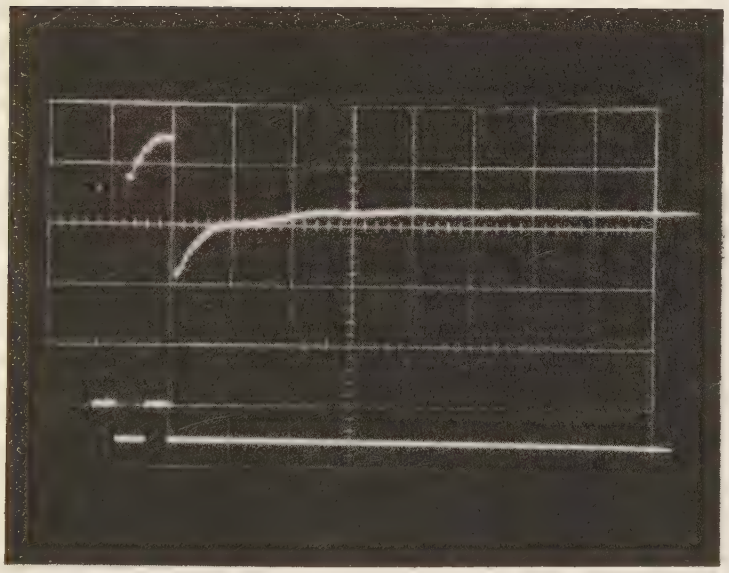
Fig. 7 . 9

a) Bulle (ø ≃ 620 µ) empalée par un côté

b) Signal correspondant



(a)



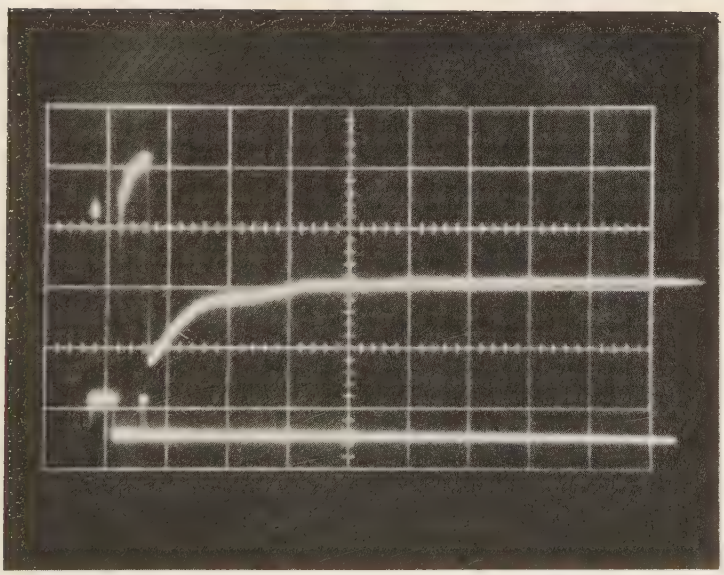
(b)

Fig. 7 . 10

a) Bulle moyenne (ø ≃ 500 µ) en cours d'empalement

b) Signal correspondant

(a)

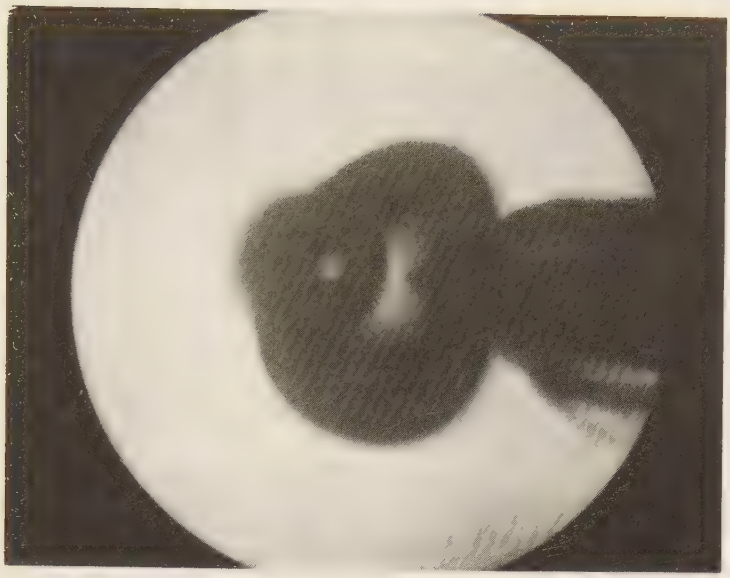


(b)

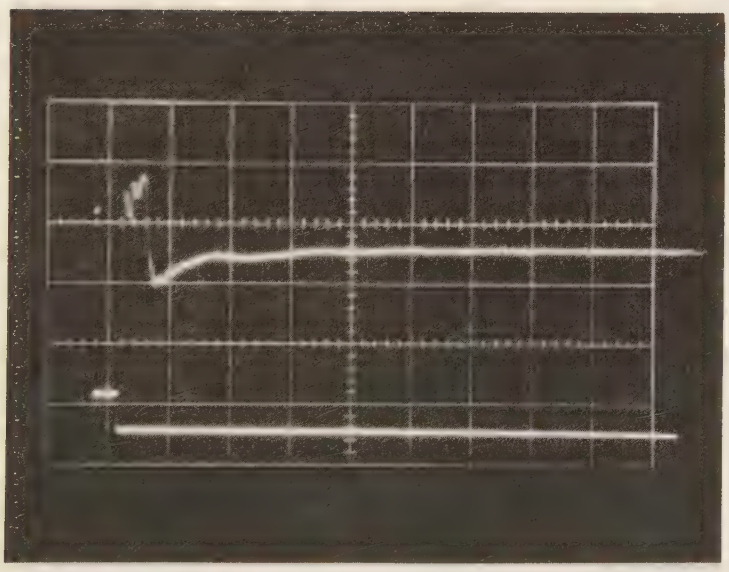
Fig. 7 . 11

a) Bulle de $\phi \simeq 600\ \mu$ empalée sur la sonde

b) Signal correspondant



(a)



(b)

Fig. 7 . 12

a) Bulles coalescentes dont l'une est sur la sonde

b) Signal correspondant

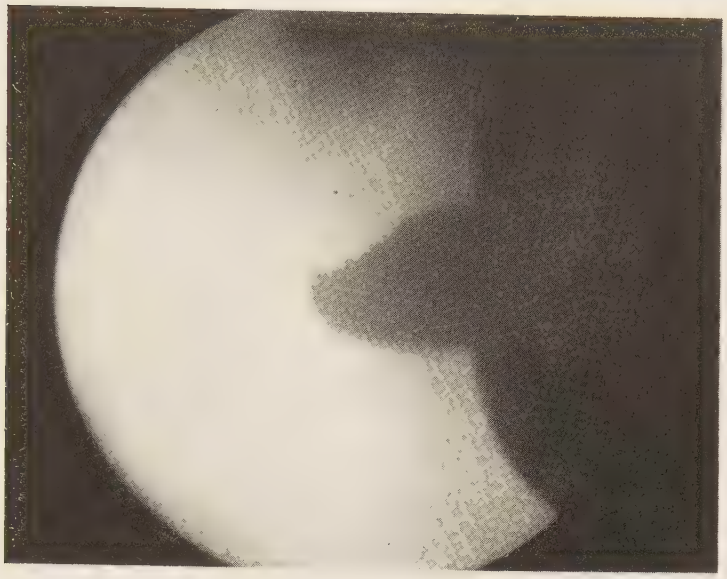


Fig. 7 . 13 _ Bulle quittant l'extrémité de la sonde

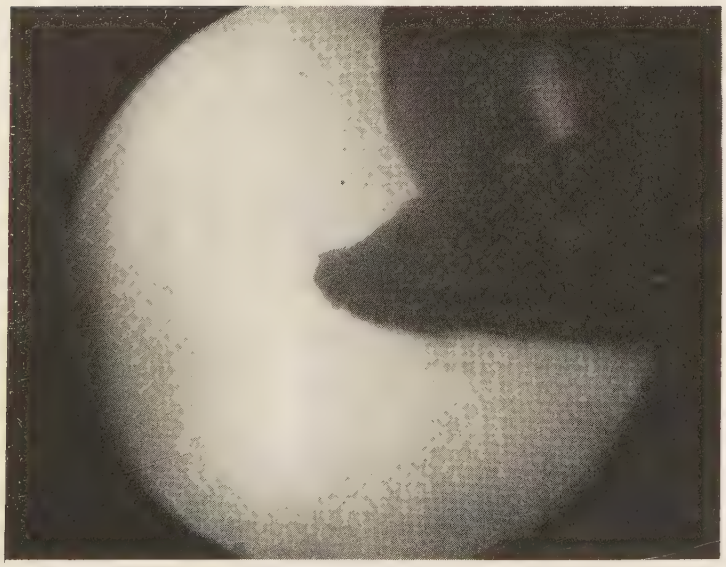


Fig. 7 . 14 _ Bulle quittant la sonde par le côté

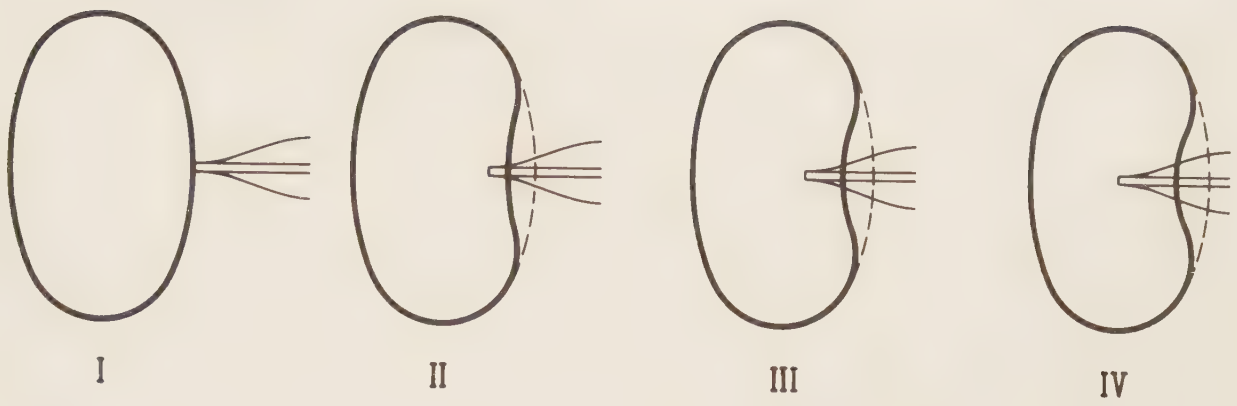


Fig. 7 . 15 _ Bulle dans ses divers degrés d'empalement

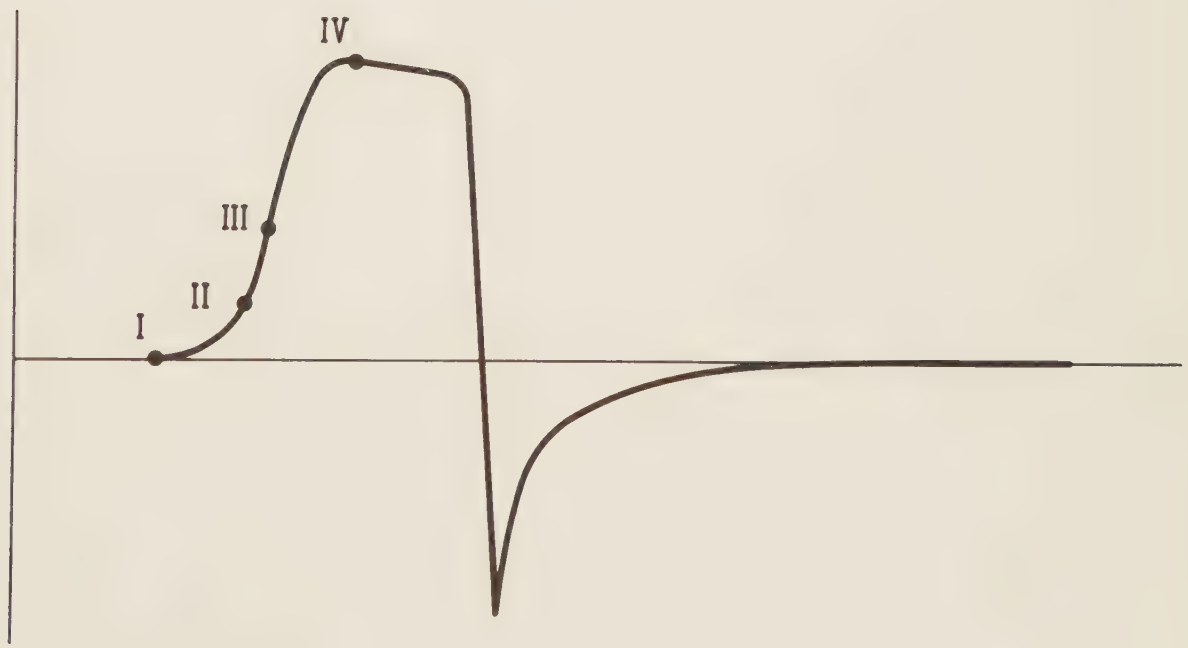


Fig. 7 . 16 _ Signal correspondant